

# رشد

## ریاضی

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی  
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره بیست و ششم
- شماره پی در پی ۱۰۰
- اسفند ۱۳۹۵
- شماره ۶
- صفحه ۴۸
- ۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی  
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی


مدیرمسئول: محمد ناصری  
سردبیر: حمیدرضا امیری  
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی  
ویراستار ادبی: بهروز راستانی  
طراح گرافیک: شاهرخ خرده‌غانی  
تصویرگر: میثم موسوی  
هیئت تحریریه:  
محمد هاشم رستمی  
دکتر ابراهیم ریحانی  
احمد قندهاری  
میرشهرام صدر  
هوشنگ شرقی  
سید محمدرضا هاشمی موسوی  
غلامرضا یاسی پور  
دکتر محرم نژاد ایردموسی  
محمدعلی قربانی  
حسین کریمی  
محمود داووزنی  
احسان یارمحمدی

وبگاه:  
www.roshdmag.ir  
پیام‌نگار:  
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

نشانی وبلاگ مجله:  
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-  
motevasete2

پیام‌گیر نشریات رشد:  
۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲

پیامک:  
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

roshdmag: 

نشانی دفتر مجله:  
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله:  
۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴

تلفن امور مشترکین:  
۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۵

شمارگان:  
۱۰۰۰ نسخه

شرکت افست (سهامی عام)

### حرف اول

راه‌اندازی یک مجله ریاضی / سردبیر ۲

### به مناسبت صدمین شماره

چه نامی بهتر از برهان! ۲۴

### آموزشی

- کاربرد اریگامی در حل مسائل ریاضی / آسیه رضایی گرجی ۳  
اثبات یک فرمول به روش‌های متفاوت / کیوان عباس‌زاده اسک شهری ۸  
حل مسئله به روش عکاسی / قاسم حسین‌قنبری ۱۱  
پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۲۰  
پنج روش با تبدیل‌های هندسی برای حل یک مسئله! / مهرداد محدث ۳۰  
آموزش ترجمه متون ریاضی / حمیدرضا امیری ۲۲  
ریاضیات در چند دقیقه / غلامرضا یاسی پور ۲۴  
ناشناخته‌های مثلث از زبان رایانه / جابر مختاری دهقادی، ولی خادم ۳۶  
اثبات دقیق قضیه پیک با استفاده از زاویه / خشایار کلوپانپور ۳۹  
مسائل برای حل / هوشنگ شرقی ۴۰

### گفت‌وگو

جوهره شعر و ریاضیات - ارتباط ریاضیات و شعر در گفت‌وگو با مجید امیری / هوشنگ شرقی ۲۶

### ریاضیات در سینمای جهان

رصدخانه مراغه و نگاهی به پیشینه ستاره‌شناسی در ایران / احسان یارمحمدی ۱۴

### ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

- ایستگاه اول: باز هم جدول‌های عددی ویژه / هوشنگ شرقی ۱۹  
ایستگاه دوم: شوالیه‌های روز و شوالیه‌های شب! ۲۳  
ایستگاه سوم: خوانندگی‌هایی از زندگی ریاضی‌دانان معاصر ۴۵

پرسش‌های پیکارچو! ۱۹-۲۸-۳۵-۴۱-۴۴

### با مخاطبان

پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و ... ۴۷

### پاسخ‌ها

- راهنمای حل مسائل ۴۲  
پاسخ پرسش‌های پیکارچو! ۴۶  
پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:  
○ نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه ۲)  
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان  
○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامه علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

### خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵

تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

## راه اندازی یک مجله ریاضی

در سال ۱۳۶۹، یعنی حدود ۲۶ سال پیش، جرقه راه اندازی یک مجله ریاضی در ذهنم زده شد، طرح تولید این مجله ریاضی دانش آموزی را با مدیرکل وقت دفتر «انتشارات کمک آموزشی»، **مهندس چینی فروشان** در میان گذاشتم که ایشان با انتشار چنین مجله‌ای کاملاً موافق بود. حتی جای خالی چنین مجله‌ای با مخاطب دانش آموز را گوشزد و خاطر نشان کرد که از سال ۱۳۵۶ که «مجله ریاضی یکان»، به سردبیری مرحوم زنده یاد دکتر **مصحفی** تعطیل شد، تاکنون مجله ریاضی برای مخاطب دانش آموز منتشر نشده است و چاپ این مجله را یک رسالت فرض کرد. خیلی سریع هم مجوز چاپ آن را پس از کسب اجازه از رئیس «سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی» آن زمان، یعنی دکتر **حداد عادل**، صادر کرد.

در طول چند سال اخیر، عزیزان و سرمایه‌هایی را از دست داده‌ایم؛ بزرگ‌مردانی که ریاضیات و آموزش ریاضی در کشور مدیون آن‌ها بوده و هست. زنده یاد دکتر **پرویز شهریاری**، زنده یاد دکتر **احمد شرف‌الدین** و زنده یاد دکتر **عبدالحسین مصحفی**، از جمله یارانی بودند که از فیض حضور ایشان محروم شدیم. حضور دوستان و استادانی که در طول این ۲۶ سال در کنارشان بوده و از راهنمایی‌هایشان بهره برده‌ایم و همچنان باعث دلگرمی هستند، به خصوص دکتر **غلامرضا یاسی پور**، استاد **احمد قندهاری**، استاد **محمد هاشم رستمی** و استاد **محمد رضا هاشمی موسوی** را بسیار گرامی می‌دارم و قدردان این حضور بابرکت و مؤثر ایشان هستم.

همچنین، بودن در کنار استادان و دوستان صدیقی که از میانه راه به جمع ما پیوسته‌اند و با ایثار و علاقه در امور مجله ما را یاری می‌کنند، برایم مایه افتخار است. **میر شهرام صدر**، **هوشنگ شرقی**، دکتر **ابراهیم ریحانی**، دکتر **محمّد نژاد ایردموسی**، **حسین کریمی**، **محمود داورزنی**، **احسان یارمحمدی** و یاران و همراهانی هستند که به وجود همگی آن‌ها و حضورشان در هیئت تحریریه مباحثات می‌کنم. از همه دست‌اندرکاران و مسئولین دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی که از شماره ۳۷ به بعد، زحمت چاپ و نشر این مجله را متقبل شده و دلسوزی‌ها و نظرات بسیار متعالی ایشان همواره هدایت‌گر و تسهیل‌گر بوده است، کمال سپاس‌گزاری دارم. به همه دبیران محترم، دانش‌آموزان کوشا و دوست‌داران مجله که جزو سرمایه‌های اصلی مجله هستند نیز توصیه می‌کنم، ارتباط بیشتری با ما داشته باشند، نظرات، انتقادات و پیشنهادات خود را برای ما بفرستند و ما را در رسیدن به هدف‌های آموزشی که مهم‌ترین آن‌ها برقراری عدالت آموزشی در سراسر کشور است، یاری کنند.

با آرزوی توفیق و سربلندی  
برای تمامی دانش‌آموزان ایران اسلامی  
**حمیدرضا امیری**  
سردبیر



آسیه رضایی گرچی  
دبیر ریاضی شهرستان کرج

# کاربرد اریگامی در حل مسائل ریاضی

اشاره

اریگامی تکنیک استفاده از «تا» است و به کمک آن با ایجاد تاهای گوناگون، شکل‌های جالب و شگفت‌انگیزی می‌توان ایجاد کرد. اریگامی در درک مفاهیم ابتدایی و حتی پیچیده ریاضی کمک شایانی به ما می‌کند. مفاهیمی که در ریاضیات، مجرد و محض به نظر می‌رسند، به کمک اریگامی شهودی‌تر و قابل فهم‌تر می‌شوند. روش مورد استفاده در این مقاله استفاده از اصول اولیه اریگامی است. با استفاده از این اصول می‌توانیم به ارتباط ریاضیات و اریگامی و حل بعضی مسائل ریاضی، مانند حل معادلات درجه ۲ و ۳ بپردازیم. آموزش مفاهیم هندسه و ریاضی، مانند تقارن و بسیاری از مفاهیم پیچیده‌تر را با کمک اریگامی، بسیار جذاب‌تر و به‌طور عملی و کاربردی می‌توانیم انجام دهیم.

**کلیدواژه‌ها:** اریگامی، تا، ریاضی، آموزش.

مقدمه

دانشگاه «رود آیلند»<sup>۱</sup> است. تز او در فهرست رنگ‌آمیزی نقشه‌های هندسی بود. وی در حال حاضر به بررسی ریاضی اریگامی اشتغال دارد. (کاغذهای تاشو). تصویرهای ۱ تا ۳ مکان‌هایی هستند که براساس اریگامی ساخته شده‌اند و نمونه‌ای از کارهای پروفیسور تام هال را نشان می‌دهند.

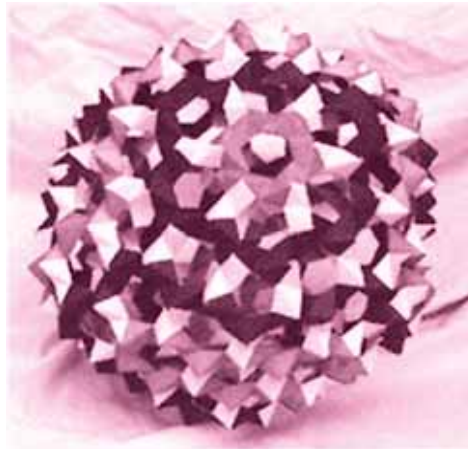


تصویر ۱ | ساختمان کتابخانه عمومی شهر سیاتل

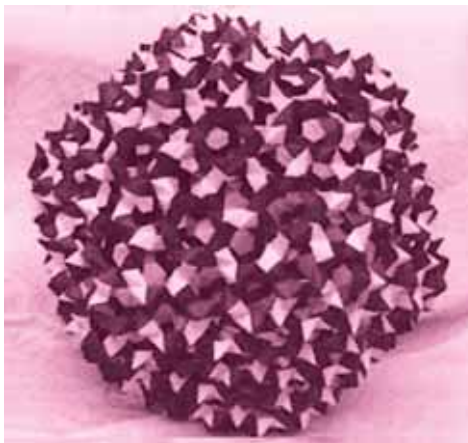
کلمه «Origami» متشکل از دو کلمه «ori» و «gami» است که به‌ترتیب به معنای «تا» و «کاغذ» است. هنر اریگامی، یعنی هنر کاغذ و تا و این یعنی، اریگامی پایه هندسی دارد و از همین‌جا به رابطه عمیق بین این دو پی می‌بریم. روش ساخت کاغذ نخستین‌بار در چین در حدود سال ۱۰۰ میلادی ابداع شد، به‌همین دلیل عده‌ای معتقدند که این هنر ابتدا در چین به‌وجود آمد و سپس به ژاپن راه یافت. در حدود قرن ششم میلادی این صنعت توسط راهبان بودایی از چین به ژاپن وارد شد. سپس در اواسط قرن هشتم میلادی و پس از تسلط اعراب مسلمان بر آسیای مرکزی، این صنعت توسط آنان به نقاط دیگر برده شد. در قرن دهم میلادی به مصر و در قرن دوازدهم میلادی به اسپانیا رسید. پس از ورود اعراب به سیسیل، این صنعت وارد ایتالیا شد و کارگاه‌های کاغذسازی در ۱۲۷۶ در «فابریونی ایتالیا» و در ۱۳۴۸ در «تروی فرانسه» آغاز به‌کار کردند. در قرن‌های چهاردهم تا شانزدهم میلادی اریگامی مدرن به‌گونه‌ای اصولی در ژاپن نوشته شد.

پروفیسور تام هال، یکی از دانشمندان رشته ریاضی

در هندسه با استفاده از خط کش و پرگار نمی توانیم یک زاویه را به سه قسمت تقسیم کنیم، در حالی که این کار با چندبار تازدن به سادگی انجام می شود



تصویر ۲ | این یک باکی بال (Buckyball) کروی مانند است که از ۳۶۰ تا پنج ضلعی زیگزاگی ساخته شده است.



تصویر ۳ | این هم یک باکی بال دیگر است که از ۸۱۰ پنج ضلعی ساخته شده است.

پرگار استفاده می کنیم. اما در هندسه با استفاده از خط کش و پرگار نمی توانیم یک زاویه را به سه قسمت تقسیم کنیم، در حالی که این کار با چندبار تازدن به سادگی انجام می شود. دو برابر کردن حجم یک مکعب و حتی حل معادلات جبری نیز به کمک اریگامی انجام پذیر است. در اریگامی از ابزارهایی مانند، خط کش، پرگار، مداد و بسیاری از ابزارهایی که در ریاضیات استفاده می کنیم، به هیچ عنوان نمی توانیم استفاده کنیم. ساختار خط کش و پرگار براساس انتخاب چند نقطه یا خط یا پاره خط اختیاری روی یک صفحه است. در اریگامی نیز به کمک تاها می توانیم نقاط و خطوط مورد نیاز را بیابیم. ممکن است این سؤال به ذهنمان خطور کند که: چه نوع تاهایی در اریگامی مدنظر ما باید باشد؟ تاهایی که مستقیم و بدون هیچ انحنايي باشند، زیرا درباره تاهایی که دارای انحنا هستند و راست نیستند، اطلاعات زیادی نداریم. از تاهایی با طول های زیاد و در امتداد مجموعه خطوط صاف که در یک زمان انجام می شوند نیز اجتناب می کنیم. زیرا این نوع از تاها باعث پیچیدگی زیاد در حل مسائل می شوند. پس به دلیل ارتباطی که بین اریگامی و هندسه وجود دارد، مقایسه این دو، چیز عجیبی نخواهد بود.

در این مقاله درباره اصول به کار رفته در اریگامی و کاربرد این اصول صحبت می شود. دیده می شود که به کمک این اصول حتی می توانیم به حل معادلات درجه ۲ و ۳ بپردازیم. یعنی رابطه ای بین اریگامی و ریاضیات وجود دارد.

### اصول اولیه اریگامی

در هندسه اصولی وجود دارند که اساس این علم را تشکیل می دهند. مشابه اصول هندسه، در اریگامی نیز اصولی داریم. فرایند کاغذ و تا هفت اصل ساده دارد. شش اصل اول به وسیله دانشمند هسته ای، به نام **هامیایکی هوزیتا**<sup>۲</sup> مطرح شد که تا به امروز قوی ترین اصول شناخته شده اند. هفتمین اصل به وسیله **جاکوبز جاستین**<sup>۳</sup> در سال ۱۹۸۹ ارائه شد. این اصل های هفت گانه عبارتند از:

**اصل ۱.** دو نقطه  $P_1$  و  $P_2$  مفروض اند. یک تا را که از بین دو نقطه می گذرد، می توان انجام داد.

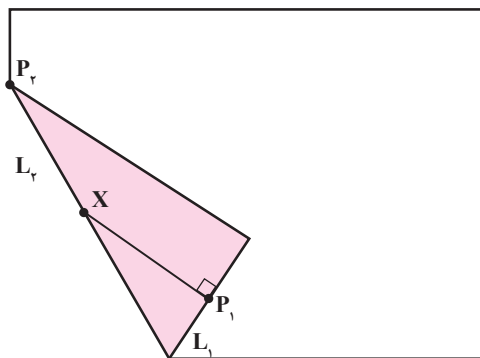
**اصل ۲.** دو نقطه  $P_1$  و  $P_2$  مفروض اند. با یک تا می توان  $P_1$  را روی  $P_2$  جای داد.

**رابرت لنگ**، دانشمند آمریکایی، به عنوان یک فیزیکدان برجسته در زمینه لیزر شناخته می شود. اما شهرت او بیشتر به خاطر اریگامی است. لنگ به عنوان دانشمند، تحقیقات زیادی روی جنبه های علمی و مهندسی اریگامی انجام داده است. یکی از تخصص های لنگ، طراحی اریگامی شکل های پیچیده (به خصوص حشرات و حیوانات) است که گاه بیشتر از ۱۰۰ مرحله دارند. او تا به حال هشت کتاب و تعداد زیادی مقاله درباره اریگامی منتشر کرده است. اریگامی هنری قدیمی است، اما امروزه دانشمندان و افراد بسیاری مانند رابرت لنگ و تام هال مشغول ساخت محصولات جدیدی با استفاده از این هنر هستند.

ما به طور معمول برای رسم سازه های ریاضی، به خصوص مباحث موجود در هندسه، از خط کش و

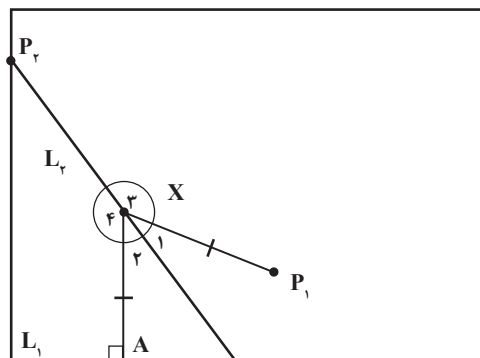
با کمک اصل‌های موجود در اریگامی و تکنیک‌های به کار رفته در آن، می‌توانیم بسیاری از مسائل موجود در ریاضیات و حتی مسائل مشکل و حل نشده را حل کنیم

فرض کنید  $L_1$  خطی باشد که ضلع پایین کاغذ ما را تشکیل می‌دهد. حال به اجرای اصل ۵ می‌پردازیم. مطابق شکل ۴، از نقطه  $P_1$  کاغذ را تا می‌زنیم تا  $P_1$  روی  $L_1$  قرار گیرد. خط تایی کاغذ را  $L_2$  می‌نامیم. طبق اصل ۴، نقطه  $P_1$  و خط  $L_2$  را در نظر می‌گیریم، از نقطه  $P_1$  می‌توانیم یک خط عمود بر قسمت تا شده  $L_2$  رسم کنیم. فرض می‌کنیم  $X$  نقطه‌ای باشد که این خط در این نقطه، خط  $L_2$  را قطع می‌کند (شکل ۵).



شکل ۵

با باز کردن صفحه بعد از تا زدن، پاره خط  $XP_1$  و پاره خطی که از  $X$  به  $L_1$  عمود رسم شده را می‌بینیم. پس  $X$  نقطه‌ای روی  $L_2$  است که دارای فاصله مساوی از  $P_1$  و  $L_1$  است. با توجه به تعریف سهمی، این نقطه روی یک سهمی با کانون  $P_1$  و هادی  $L_1$  قرار دارد. طبق اصل ۳، چون با خط تایی  $L_2$ ،  $XA$  روی  $XP_1$  قرار می‌گیرد. این یعنی  $L_2$  نیم‌ساز زاویه  $AXP_1$  است (مطابق شکل ۶).  $(\widehat{X_1} = \widehat{X_2})$ . از طرف دیگر، چون فاصله  $X$  از  $P_1$  و  $A$  به یک اندازه است، می‌توانیم نتیجه بگیریم، هر نقطه روی  $L_2$  از  $A$  و  $P_1$  به یک فاصله است. زیرا کافی است یک نقطه مانند  $Y$  را بین  $X$  و  $P_1$  انتخاب کنیم.



شکل ۶

اصل ۳. دو خط  $L_1$  و  $L_2$  مفروض‌اند. با یک تا می‌توان  $L_2$  را روی  $L_1$  جای داد.

اصل ۴. نقطه  $P_1$  و خط  $L_2$  مفروض‌اند. با یک تا می‌توان خطی بر  $L_2$  عمود کرد که از  $P_1$  بگذرد.

اصل ۵. نقاط  $P_1$  و  $P_2$  و خط  $L_1$  مفروض‌اند. با یک تا می‌توان  $P_1$  را روی خط  $L_1$  قرار داد و از  $P_2$  نیز گذشت.

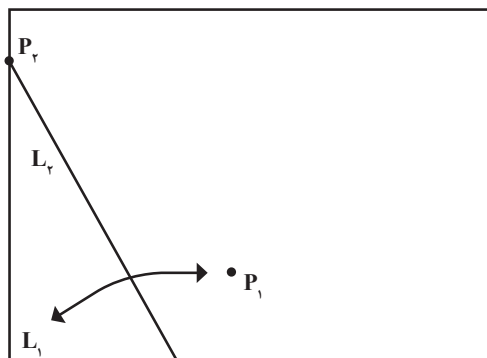
اصل ۶. نقاط  $P_1$  و  $P_2$  و دو خط  $L_1$  و  $L_2$  مفروض‌اند. با یک تا می‌توان  $P_1$  را روی خط  $L_1$  و  $P_2$  را روی خط  $L_2$  قرار داد.

اصل ۷. نقطه  $P$  و دو خط  $L_1$  و  $L_2$  مفروض‌اند. با یک تا می‌توان  $P$  را روی خط  $L_1$  قرار داد، به طوری که بر خط  $L_2$  عمود باشد.

ترسیم دقیق با خط کش و پرگار، توانایی ما را در حل مسائلی نظیر، تقسیم کردن یک زاویه به سه بخش مساوی، یا دو برابر کردن حجم یک مکعب، یا ترسیم یک خط با طول  $\sqrt{2}$  و مسائلی مشابه، محدود می‌کند، اما با کمک تکنیک‌های موجود در اریگامی بسیاری از این مسائل را می‌توان حل کرد.

### تکنیک‌های مفید اریگامی

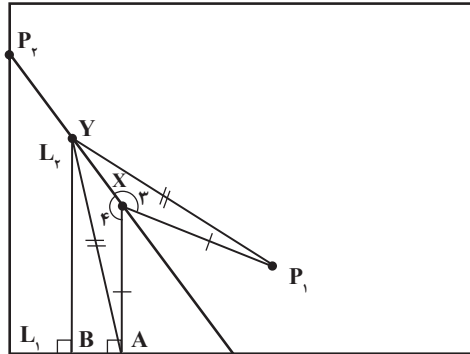
با کمک اصل‌های موجود در اریگامی و تکنیک‌های به کار رفته در آن، می‌توانیم بسیاری از مسائل موجود در ریاضیات و حتی مسائل مشکل و حل نشده را حل کنیم. اصل‌های ۱ تا ۴ به راحتی قابل بررسی هستند. در اینجا به بررسی اصل ۵ می‌پردازیم. با کمک این اصل، می‌توانیم رابطه‌ای را که بین ریاضیات و اریگامی وجود دارد، ببینیم. ابتدا کاغذی را مطابق شکل ۴ در نظر می‌گیریم.



شکل ۴

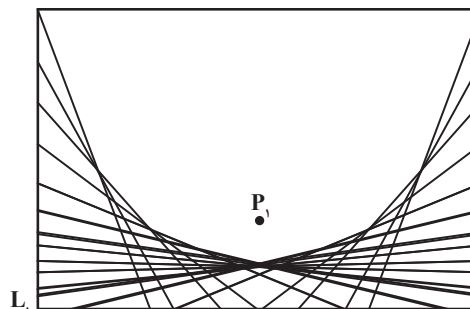
مطابق شکل ۷، دو مثلث  $XYA$  و  $XYP_1$  با یکدیگر هم‌نهشت هستند، زیرا داریم:

$$\overline{YA} = \overline{YP_1}, \overline{XY} = \overline{XY}, \widehat{X_1P_1} = \widehat{X_1A}$$



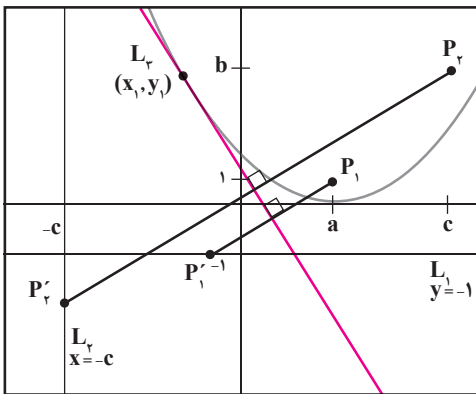
شکل ۷

پس داریم:  $\overline{YA} = \overline{YP_1}$ . با توجه به اصل ۴، خطی را که از  $Y$  می‌گذرد و بر  $L_1$  عمود است، رسم می‌کنیم. با توجه به شکل ۷، مثلث  $YBA$  قائم‌الزاویه است. بنابراین:  $\overline{YB} < \overline{YA} = \overline{YP_1}$  و این یعنی روی سهمی با کانون  $P_1$  و هادی  $L_1$  قرار ندارد. با توجه به اینکه همهٔ نقاط روی سهمی، باید به یک فاصله از خط هادی و کانون  $P_1$  سهمی باشند، پس سهمی با کانون  $P_1$  و  $L_1$ ، بالای خط  $L_1$  در این نقطه، یعنی نقطهٔ  $X$ ، قرار دارد. به‌طور مشابه می‌توانیم برای هر نقطه روی  $L_1$  درستی این مطلب را نشان دهیم که از  $X$  تا  $L_1$  به یک فاصله است. بنابراین خط  $L_1$  خط مماس بر سهمی در نقطهٔ  $X$  است. برای درک بهتر این مسئله باید نقاط زیادی را در طول ضلع‌های چپ و راست کاغذتان برای نمایش  $P_1$  انتخاب کنید. برای مشخص کردن طرح و شکل‌بندی سهمی برای هر یک از نقاط مورد نظر، اصل ۵ را اجرا کنید. با توجه به اینکه سهمی یک معادلهٔ درجهٔ دوم است، به کمک این اصل به یکی از روابطی که بین ریاضیات و اریگامی وجود دارد، پی می‌بریم.



شکل ۸

حال به بررسی اصل ۶ و چگونگی کمک این اصل به حل یک معادلهٔ درجهٔ سوم می‌پردازیم. فرض می‌کنیم معادله‌ای مانند  $x^3+ax^2+bx+c=0$  معادلهٔ درجهٔ ۳ ما باشد. فرض کنید  $P_1$  نقطه‌ای در بازهٔ  $(a, 1)$  و  $P_2$  در بازهٔ  $(c, b)$  باشد. با توجه به دو نقطهٔ  $P_1$  و  $P_2$ ، خط  $L_1$  به معادلهٔ  $y+1=0$  و خط  $L_2$  به معادلهٔ  $x+c=0$  تعریف می‌شوند. طبق اصل ۶ با یک تا،  $P_1$  را روی خط  $L_1$  و  $P_2$  را روی خط  $L_2$  قرار می‌دهیم و این خط‌ها را  $L_1$  می‌نامیم. چون این خط‌ها موازی با محورهای مختصات نیست، پس دارای معادله‌ای به صورت  $y=tx+u$  خواهد بود. با توجه به آنچه در بررسی اصل ۵ مطرح شد، خط  $L_1$  خط مماس بر سهمی با کانون  $P_1$  و هادی  $L_2$  است. و نیز با توجه به مختصات  $P_1(a, 1)$  و خط هادی به معادلهٔ  $L_2: y+1=0$  می‌توانیم معادلهٔ سهمی را به صورت  $4y=(x-a)^2$  داشته باشیم.



شکل ۹

فرض کنید  $(x_1, y_1)$  نقطه‌ای روی  $L_1$  باشد که  $L_2$  در این نقطه بر سهمی فوق مماس باشد. پس داریم:  $4y_1=(x_1-a)^2$ . شیب خط مماس، همان مشتق در نقطهٔ تماس است. پس با توجه به اینکه این مشتق برابر  $y' = \frac{1}{2}(x-a)$  است، شیب خط مماس برابر  $t = \frac{1}{2}(x_1-a)$  است. با استفاده از شیب به‌دست آمده می‌توانیم نقطهٔ تماس و معادلهٔ خط را به صورت  $y - y_1 = \left[ \frac{1}{2}(x_1 - a) \right] (x - x_1)$  بازنویسی داریم:  $y = \frac{1}{2}[(x_1 - a)x - (x_1 - a)x_1] + y_1$

## نتیجه

در این مقاله با استفاده از اصول اریگامی به حل معادلات درجه ۲ و ۳ پرداختیم. استفاده از اریگامی نسبت به روش‌های دیگری که در ریاضیات تاکنون برای حل این نوع معادلات به کار رفته‌اند، روشی شهودی‌تر و قابل لمس‌تر است. به کمک این روش توانستیم ارتباط جالبی بین حل مسائل ریاضیات و قوانین موجود در اریگامی بیابیم. با توجه به اینکه اغلب دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات مشکل دارند، آموزش مفاهیم ریاضی به صورت بازی، یادگیری را برای آنان شیرین و آسان می‌کند. با استفاده از این روش می‌توانیم دانش‌آموز را به‌طور مستقیم در فرایند آموزش و یادگیری درگیر کنیم و این امر کمک شایانی به معلم در هر دو فرایند می‌کند.

\*پی‌نوشت‌ها.....

1. Rhode Island
2. Humiaki Huzita
3. Jacques Justin

\*منابع.....

1. K. Hatori, Origami construction, K's Origami, <http://origami.ousaan.com/library/conste.html>.
2. T. Hull, A comparison between straight edge and compass constructions and origami, Origami and Geometric Constructions, <http://kahuna.merrimack.edu/thull/om-les/geoconst.html>.
3. Krier, Jaema L. "Mathematics and Origami: The Ancient Arts Unite." The University of Texas at Tyler. Math. Uttyl. Edu/athan/classes/senior-seminar/Jaem. 2007.

**اغلب**  
**دانش‌آموزان در**  
**یادگیری ریاضیات**  
**مشکل دارند،**  
**آموزش مفاهیم**  
**ریاضی به صورت**  
**بازی، یادگیری را**  
**برای آنان شیرین**  
**و آسان می‌کند**

با توجه به شیب خط می‌توانیم این معادله را به صورت  $y = tx - \frac{1}{c}[(x_1 - a)x_1] + y_1$  داشته باشیم. فرض می‌کنیم:  $u = -\frac{1}{c}[(x_1 - a)x_1] + y_1$  باشد، با جای‌گذاری در رابطه (۱) و طبق  $t$  در رابطه (۳) می‌بینیم:  $u = \frac{1}{c}(x_1 - a)^2 - tx_1$  با به‌دست آوردن  $x_1$  طبق رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$u = -t(2t + a) + t^2 \Rightarrow u = -t^2 - at$$

به‌طور مشابه، معادله برای سهمی با کانون  $P_r(c, b)$  و هادی  $L_r: x + c = 0$  را می‌توان به صورت  $4cx = (y - b)^2$  نوشت. مشابه قبل فرض کنید  $(x_r, y_r)$  نقطه‌ای روی  $L_r$  بوده و  $L_r$  در این نقطه بر این سهمی مماس باشد.

پس می‌توان نوشت:  $4cx_r = (y_r - b)^2$ . لذا خواهیم داشت:

$$(4) \quad x_r = \frac{(y_r - b)^2}{4c}$$

داشت:  $y' = \frac{2c}{y_r - b}$  که شیب خط مماس در نقطه

تماس عبارت است از:  $t = \frac{2c}{y_r - b}$  با توجه به این رابطه می‌توانیم بنویسیم:  $(5) \quad y_r - b = \frac{2c}{t} \Rightarrow y_r = \frac{2c}{t} + b$

معادله خط مماس در نقطه  $(x_r, y_r)$ ، به صورت  $y - y_r = \frac{2c}{y_r - b}(x - x_r)$  است و این رابطه را به این صورت بازنویسی می‌کنیم:  $y = \frac{2cx}{y_r - b} - \frac{2cx_r}{y_r - b} + y_r$

اگر فرض کنیم  $u = -\frac{2cx_r}{y_r - b} + y_r$ ، با توجه به  $t$  و  $x_r$

داریم:

$$u = \frac{2c}{t} + b - \frac{c}{t} = b + \frac{c}{t} \Rightarrow u = -t - at, u = b + \frac{c}{t} \\ \Rightarrow -t^2 - at = b + \frac{c}{t} \Rightarrow t^2 + at^2 + bt + c = 0, (c \neq 0)$$

وقتی  $c = 0$  باشد، بدان معنی است که  $P_r$  روی  $P'_r$  قرار دارد. همچنین در این حالت  $t = 0$  یا  $u = b$  است و داریم:  $t^2 + at + b = 0$ . همان‌طور که دیدیم، این اصل به حل معادله درجه ۳ و در حالت خاص درجه ۲ تبدیل می‌شود. در نتیجه می‌توان درک کرد که چگونه می‌توان این اصل را برای حل چنین مسائلی به کار برد.

### پرسش‌های بیکارجو!

چند عدد طبیعی  $y$  می‌توان یافت به طوری که  $2^y + 1$  مضرب ۷ باشد؟


(الف) ۱

(ب) ۲

(ج) ۳

(د) ۴

(ه) صفر





کیوان عباس زاده اسک شهری  
دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی

# اثبات یک فرمول به روش‌های متفاوت

## روش اول

مشابه آنچه در بالا گفته شد، عمل می‌کنیم. فرض کنیم مجموع مورد نظر برابر  $S$  است؛ یعنی:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + N$$

حال می‌توان مجموع بالا را به صورت زیر نوشت:

$$S = (N + 1 - N) + (N + 1 - (N - 1)) + (N + 1 - (N - 2)) + \dots + (N + 1 - 1)$$

بعد از مرتب کردن جملات بالا داریم:

$$S = \underbrace{((N + 1) + (N + 1) + \dots + (N + 1))}_N - (1 + 2 + \dots + (N - 1) + N)$$

$$\rightarrow S = (N \times (N + 1)) - S$$

$$\rightarrow 2S = N(N + 1)$$

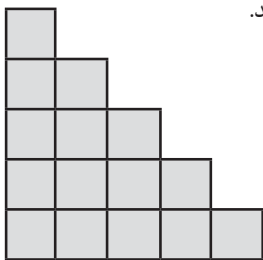
$$\rightarrow S = \frac{N(N + 1)}{2}$$

## روش دوم

حال می‌خواهیم به یک روش هندسی بسیار زیبا فرمول بالا را ثابت کنیم. ابتدا به جای عدد  $N$  یک عدد بسیار کوچک مثلاً ۵ می‌گذاریم تا روش اثبات به خوبی ملموس شود. بنابراین می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \times 6}{2}$$

به شکل ۱ توجه کنید.



شکل ۱.

ابتدا با طرح یک مسئله شروع می‌کنیم. مجموع زیر را به دست آورید:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1000$$

مسئله کاملاً واضح است. می‌خواهیم اعداد ۱ تا

۱۰۰۰ را جمع کنیم. یکی از راه‌های به دست آوردن

مجموع بالا این است که از عدد ۱ شروع کنیم و

یکی یکی اعداد را جمع کنیم (راه‌حلی که به ذهن هر

کسی می‌رسد). اما این کار اصلاً جالب نیست و علاوه

بر آن به زمان زیادی نیاز دارد. بنابراین باید به دنبال

راه‌حلی هوشمندانه و البته زیبا باشیم. فرض کنیم

مجموع برابر  $S$  است؛ یعنی:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$$

حال می‌توان مجموع بالا را به صورت زیر نوشت:

$$S = (1001 - 1000) + (1001 - 999) + (1001 - 998) + \dots + (1001 - 1)$$

بعد از مرتب کردن جملات داریم:

$$S = \underbrace{(1001 + 1001 + \dots + 1001)}_{1000 \text{ بار}}$$

$$- (1 + 2 + 3 + \dots + 998 + 999 + 1000)$$

$$\rightarrow S = (1000 \times 1001) - S$$

$$\rightarrow 2S = 1000 \times 1001$$

$$\rightarrow S = \frac{1000 \times 1001}{2}$$

اکنون با استفاده از راه‌حل بالا می‌توان به فرمول

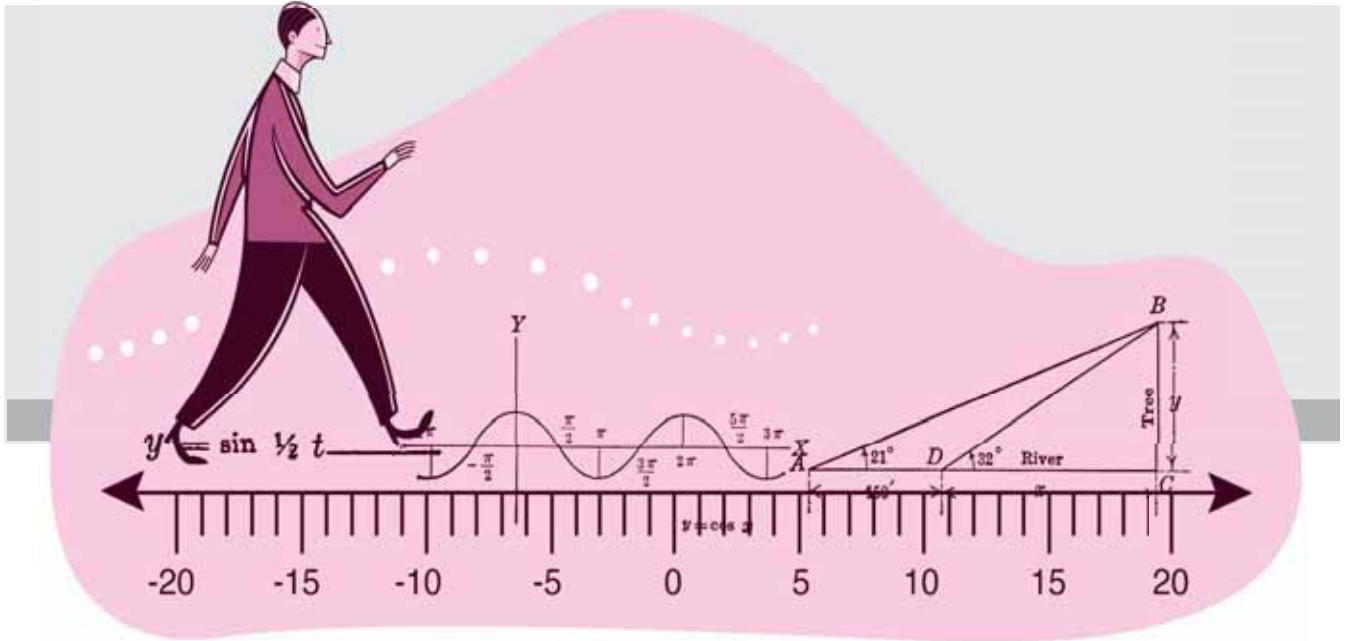
کلی زیر دست یافت:

$$1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{N(N + 1)}{2}$$

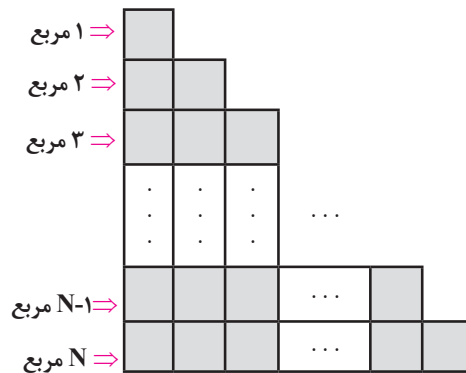
در ادامه به روش‌های متفاوت فرمول بالا را اثبات

می‌کنیم.





حال می‌توان با استفاده از روش بالا فرمول را در حالت کلی اثبات کرد. به شکل ۳ توجه کنید.



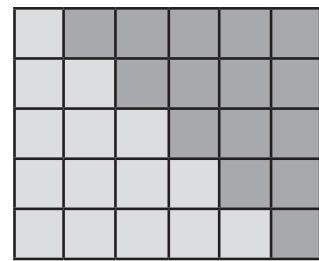
شکل ۳.

در شکل ۳ در ردیف اول ۱ مربع، در ردیف دوم ۲ مربع، در ردیف سوم ۳ مربع و به همین ترتیب در ردیف آخر (ردیف N ام) N مربع وجود دارد. در واقع از بالا به پایین که می‌آییم، تعداد مربع‌ها در هر ردیف یک واحد افزایش می‌یابد. پس تعداد مربع‌های کمرنگ در شکل ۳ برابر است با:

$$1+2+3+\dots+N$$

تعداد مربع‌های کمرنگ را به روش دیگری می‌شماریم. شکل ۳ را به شکل ۴ تبدیل می‌کنیم.

تعداد مربع‌های کمرنگ در شکل ۱ برابر  $1+2+3+4+5$  است. زیرا از بالا در ردیف اول ۱ مربع، در ردیف دوم ۲ مربع و به همین ترتیب در ردیف پنجم ۵ مربع واقع است. حال تعداد این مربع‌ها را به روش دیگری به دست می‌آوریم. شکل ۱ را به شکل ۲ تبدیل می‌کنیم.



شکل ۲.

تعداد کل مربع‌ها در شکل ۲، چه پررنگ و چه کمرنگ، برابر است با  $5 \times 5$ . از طرف دیگر، تعداد مربع‌های کمرنگ با تعداد مربع‌های پررنگ برابر است. پس تعداد مربع‌های کمرنگ برابر است با:

$$\frac{5 \times 5}{2}$$

بنابراین تعداد مربع‌های کمرنگ از یک طرف برابر است با:  $1+2+3+4+5$  و از طرف دیگر برابر است با:  $\frac{5 \times 5}{2}$ . نتیجه می‌گیریم:

$$1+2+3+4+5 = \frac{5 \times 5}{2}$$

پس حکم برای  $N$  نیز درست است؛ یعنی  $P(N)$  درست است. در نتیجه حکم برای تمام اعداد طبیعی  $N$  صحیح است.

### روش چهارم

در اینجا ابتدا اتحادی بسیار زیبا و کاربردی از ترکیبیات را اثبات می‌کنیم:

**اتحاد چوشی - چی:** فرض کنید  $k$  و  $N$  دو عدد طبیعی هستند. آن‌گاه داریم:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{N}{k} = \binom{N+1}{k+1}$$

**اثبات:** از «اتحاد پاسکال» استفاده می‌کنیم:

$$\binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{N}{k} &= \sum_{m=k}^N \binom{m}{k} \\ &= \sum_{m=k}^N \left( \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1} \right) \end{aligned}$$

حال طبق قاعدهٔ ادغام (تلسکوپی) داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^N \left( \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1} \right) &= \binom{N+1}{k+1} - \binom{k}{k+1} \\ &= \binom{N+1}{k+1} \end{aligned}$$

در نتیجه اتحاد چوشی - چی ثابت می‌شود. البته اتحاد چوشی - چی اثبات‌های گوناگونی دارد که می‌توان آن‌ها را در کتاب‌های ترکیبیات یافت.

حال در اتحاد چوشی - چی قرار دهید  $k=1$ . در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \binom{1}{1} + \binom{1+1}{1} + \dots + \binom{N}{1} &= \binom{N+1}{1+1} \\ \rightarrow \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \dots + \binom{N}{1} &= \binom{N+1}{2} \\ \rightarrow 1+2+3+\dots+N &= \frac{N(N+1)}{2} \end{aligned}$$

			...			
			...			
			...			
.	.	.	...	.	.	.
.	.	.	...	.	.	.
.	.	.	...	.	.	.
			...			
			...			

شکل ۴.

تعداد کل مربع‌ها، چه پررنگ و چه کم‌رنگ، در شکل ۴ برابر  $N(N+1)$  است. از طرف دیگر، تعداد مربع‌های کم‌رنگ با تعداد مربع‌های پررنگ برابر است. پس تعداد مربع‌های کم‌رنگ برابر است با:  $\frac{N(N+1)}{2}$

بنابراین تعداد مربع‌های کم‌رنگ از یک طرف برابر  $1+2+3+\dots+N$  و از طرف دیگر برابر  $\frac{N(N+1)}{2}$  است. نتیجه می‌گیریم:

$$1+2+3+\dots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

### روش سوم

می‌خواهیم حکم زیر را ثابت کنیم:

$$P(N): 1+2+3+\dots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

با استقرا روی عدد  $N$  حکم بالا را اثبات می‌کنیم.

حکم به ازای  $N=1$  درست است زیرا  $1 = \frac{1 \times 2}{2}$ . پس  $P(1)$  برقرار است. حال فرض کنیم حکم برای  $N-1$  برقرار است یعنی داریم:

$$P(N-1): 1+2+3+\dots+(N-1) = \frac{N(N-1)}{2}$$

اکنون حکم را برای عدد  $N$  اثبات می‌کنیم. یعنی ثابت می‌کنیم  $P(N)$  برقرار است. داریم:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+N &= (1+2+3+\dots+(N-1)) + N \\ &= \frac{N(N-1)}{2} + N \\ &= \frac{N(N-1) + 2N}{2} \\ &= \frac{N^2 + N}{2} \\ &= \frac{N(N+1)}{2} \end{aligned}$$



فاسم حسین قنبری  
دبیر ریاضی سمنان



### مقدمه

می توان وارد کرد. یکی روش معمول که همان صفحه کلید است و روش دوم که از فرمول عکس گرفته می شود. البته فرمول باید به زبان انگلیسی و خوانا نوشته شده باشد.



شکل ۲. دوربین برای عکاسی از فرمول

همان طور که در تصویر ۲ معلوم است، بالای نرم افزار نواری وجود دارد که شاخه های ریاضی را مشخص کرده است. قبل از وارد کردن فرمول باید شاخه مورد نظر را انتخاب کرد. مثلاً برای محاسبه مشتق تابع «Calculus» و برای کارهای آماری «Statistics» و برای مثلثات «Trigonometry» را انتخاب می کنیم.

### حل یک مسئله ساده

برای آشنایی با نرم افزار مسئله ای را از جبر انتخاب می کنیم. به این منظور تابع  $y = x^2 - 3x$  را در نظر می گیریم و می خواهیم آن را تحلیل کنیم؛ یعنی نمودار آن را رسم کنیم، صفرهای آن را مشخص کنیم و... به این منظور در نوار بالا گزینه «Algebra» را انتخاب می کنیم، فرمول را

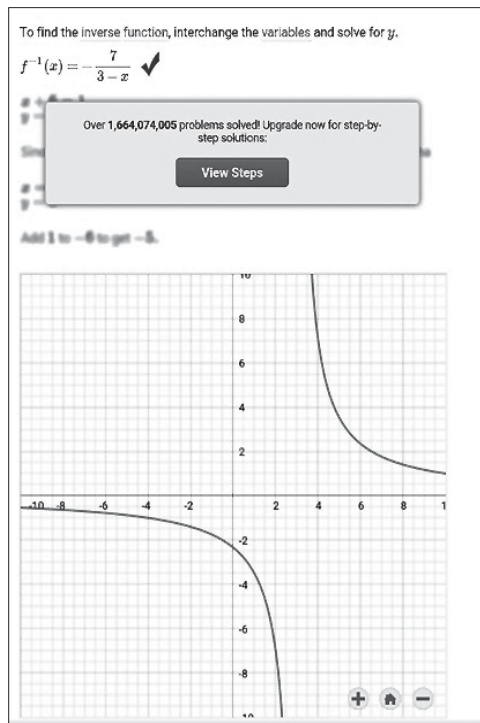
ماشین های حساب روزبه روز پیشرفت می کنند و کارهای بیشتری را در ریاضی به عهده می گیرند. یکی از سختی های کار با ماشین حساب، وارد کردن اطلاعات به آن است که البته روزبه روز هم آسان تر می شود. اما نرم افزار «Mathway» کار را وارد مرحله جدیدی کرده است. تنها کافی است که از فرمول مورد نظر با گوشی خود عکسی بگیرید تا نرم افزار فهرستی از کارهای متفاوتی را در اختیار شما قرار دهد که می توانید با این فرمول انجام دهید. در انتهای کار، این نرم افزار را در یک امتحان نهایی شرکت می دهیم تا بررسی کنیم، نرم افزار چه نمره ای از آزمون کسب می کند. آیا Mathway کابوس معلم های ریاضی است؟ آزمون های آینده چگونه خواهند بود؟ کار دانش آموزان سخت تر می شود یا راحت تر؟



شکل ۱. اپلیکیشن Mathway

نرم افزار Mathway روی تبلت و گوشی های تلفن همراه با سیستم عامل اندروید فعال می شود و به صورت رایگان در دسترس است. پس از نصب این نرم افزار و ایجاد اپلیکیشن و فراخوانی آن، تصویر ۲ را خواهیم داشت. همان طور که در شکل معلوم است، فرمول ها را به دو روش

به‌عنوان مثال دیگر، وارون تابع  $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$  را حساب می‌کنیم. بعد از نوشتن فرمول در قسمت «Answer»، گزینه «Find the inverse» را انتخاب می‌کنیم (تصویر ۵). نرم‌افزار علاوه بر پیدا کردن فرمول  $f^{-1}(x)$  نمودار آن را هم رسم می‌کند. در این مسئله هم راه‌حل تشریحی وجود دارد، ولی باز هم پنهان شده است.



شکل ۵.

### کار با دوربین

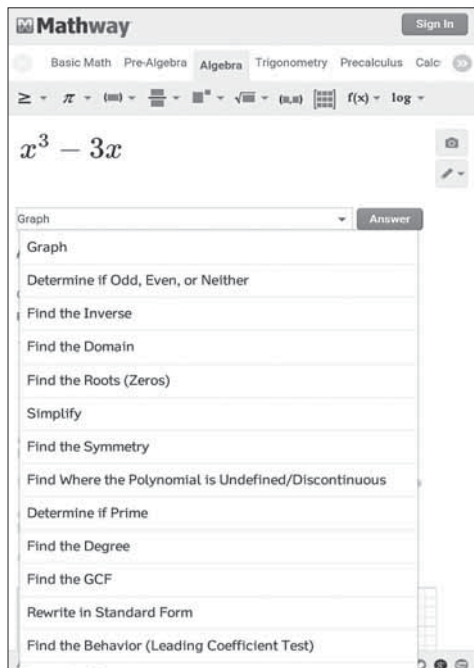
برای کار با دوربین یادآوری می‌شود که برنامه فقط مسائل محاسباتی را حل می‌کند و فرمول‌ها باید به زبان انگلیسی و خوش خط باشند. مثلاً می‌خواهیم نامعادله  $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$  را حل کنیم. ابتدا با خط خوانای انگلیسی آن را می‌نویسیم و سپس با دوربین Mathway آن را اسکن می‌کنیم (تصویر ۶).

$$\frac{x+1}{x-3} \geq 0$$

شکل ۶.

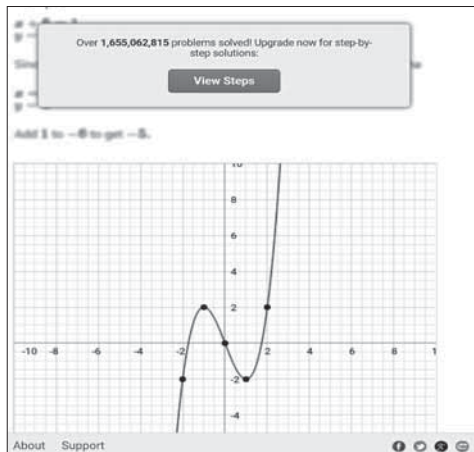
بعد از اسکن، برنامه آن را به‌صورت تصویر ۷ درمی‌آورد و مسئله را حل می‌کند.

می‌نویسیم، و کلید «Answer» را لمس می‌کنیم تا نرم‌افزار گزینه‌های متفاوتی را در اختیار ما قرار دهد (تصویر ۳).



شکل ۳.

همان‌طور که در تصویر ۳ مشخص است، گزینه‌های متفاوتی در اختیار داریم. برای رسم نمودار، گزینه «Graph» را انتخاب می‌کنیم و تصویر ۴، جواب مسئله ما است و قسمتی از راه‌حل هم در آن ارائه شده است. همان‌طور که در تصویر ۴ نمایان است، قسمتی از راه‌حل پنهان شده است که در صورت پرداخت هزینه، راه‌حل هم نمایش داده می‌شود.



شکل ۴.

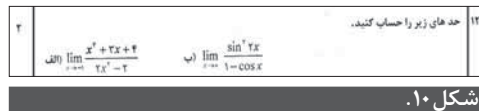
### آیا Mathway

کابوس معلم‌های ریاضی است؟

آزمون‌های آینده چگونه خواهند بود؟

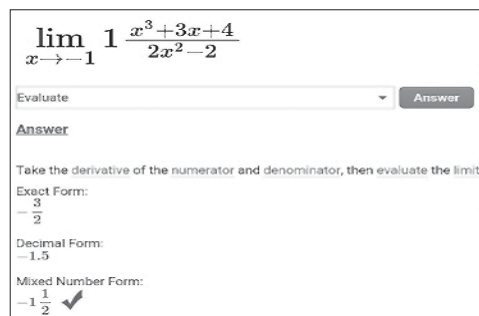
کار دانش‌آموزان سخت‌تر می‌شود یا راحت‌تر؟

می‌کنیم. برای کار با دوربین، مجبوریم در آن کمی تغییر ایجاد کنیم، زیرا نرم‌افزار عبارت  $\lim$  را نمی‌شناسد.



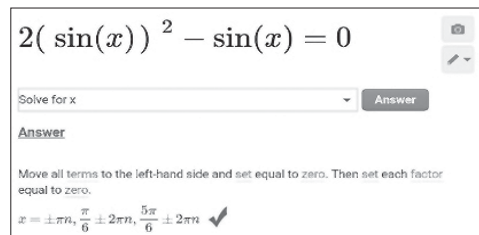
شکل ۱۰.

نخست جواب قسمت الف. در تصویر ۱۱ مشخص است که ضابطه تابع با دوربین وارد شده است. در قسمت جواب توضیح داده شده است که برای حل مسئله از صورت و مخرج مشتق می‌گیریم و در آن مقدار منفی یک را جاگذاری می‌کنیم.



شکل ۱۱.

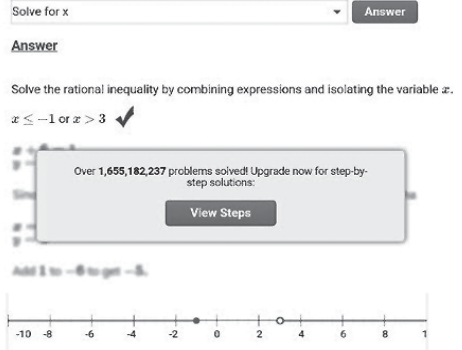
اما در سؤال ۱۰ محاسبه مقدار  $\cos(\sin^{-1}(\frac{3}{5}))$  موردنظر است که اگر به صورت  $\cos(\arcsin(\frac{3}{5}))$  وارد شده بود، دوربین Mathway آن را می‌شناخت. جواب تصویر ۱۲ است.



شکل ۱۲.

اما در سؤال ۱۱ بررسی وجود  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  موردنظر است و تصویر ۱۲ جواب مسئله است. اگر نمره Mathway را در این آزمون حساب کنیم، حداقل ۱۳ است. این نرم‌افزارها که روزبه‌روز هم پیشرفت می‌کنند، از یک سو امکانات زیادی در اختیار ما می‌گذارند و از سوی دیگر مشکلاتی را نیز در یادگیری برای ما ایجاد می‌کنند. در هر صورت نیاز است که با دید باز با آن‌ها برخورد کنیم. از امکانات آن‌ها به‌طور کامل استفاده کنیم و محدودیت‌های آن را نیز بشناسیم.

$$\frac{x+1}{x-3} \geq 0$$



شکل ۷.

بنابراین کار با نرم‌افزار به آموزش خاصی نیاز ندارد. برای نشان دادن قدرت این نرم‌افزار، ابتدا فقط با دوربین آن در یک آزمون شرکت می‌کنیم. در صورت نیاز فرمول‌ها را به صورت دستی وارد می‌کنیم.

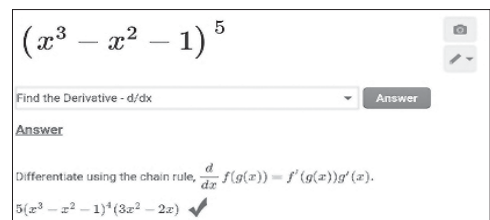
### آزمون حسابان ۹۵ با استفاده از دوربین Mathway

همانند دانش‌آموزان ابتدا سراغ سؤال‌هایی می‌رویم که جواب آن‌ها را می‌دانیم. بهترین حالت این است که مسئله مشتق‌گیری را حل کنیم که سؤال پانزدهم است.



شکل ۸.

برای پاسخ به این سؤال فقط از دوربین استفاده می‌کنیم. البته به جای « $\tan^{-1}$ » از « $\arctan$ » استفاده می‌کنیم تا برای Mathway با معنی باشد. تصویرهای ۹ تا ۱۱ جواب‌ها را با توضیح راه‌حل بیان کرده‌اند. (قسمت الف)



شکل ۹.

سایر قسمت‌ها هم به همین سادگی حل می‌شوند بنابراین همه ۲/۵ نمره این سؤال را به دست آوردیم. در ادامه سؤال ۱۲ را که محاسبه حد توابع است، حل



احسان یارمحمدی

- کارگردان، تهیه‌کننده و نویسنده: حسین پورستار
- تصویربردار و نورپرداز: حسن نوری و کیلی
- صدابردار و صداگذار: ابوالفضل میرزایی
- تدوین: بهزاد شاهدی
- آهنگ‌ساز: محمد ملکی‌اصل
- تهیه شده در: گروه مستند شبکه استانی سهند (صدا و سیمای مرکز آذربایجان شرقی) • تاریخ تولید: بهار ۱۳۹۱

اشاره

انتشار یکصدمین شماره مجله برهان متوسطه دوره دوم در اسفندماه ۱۳۹۵ این بهانه را به ما داد که به مناسبت پاسداشت جایگاه علمی خواجه نصیرالدین طوسی و روز مهندس در ۵ اسفند، مقاله ریاضیات در سینمای جهان این شماره را به فیلم مستندی درباره این دانشمند بزرگ و کارها و دستاوردهای درخشان او اختصاص دهیم. فیلم رصدخانه مراغه و نگاهی به پیشه ستاره‌شناسی در ایران، مستندی زیباییست که دربرگیرنده موارد جالب توجهی درباره رصدخانه مراغه و جزئیات آن و نیز اهمیت و نقش خواجه نصیرالدین در تأسیس و اداره آن و موارد متعدد ارزنده دیگر است. در ادامه به ارائه مطالبی درباره این فیلم می‌پردازیم و امیدواریم که شما هم با تهیه آن به تماشای این فیلم بنشینید.

بقایای رصدخانه مراغه

باغ شهر مراغه، مکانی سرسبز، آرمیده در دامنه سهند، مشرف به شهر مراغه است و آن را همچون نگهبانی زیر نگاه خود گرفته است. پیش از کاوش‌های سال‌های اخیر، «رصدخانه» تپه‌ای بود، به سان دیگر تپه‌ها؛ علفزار و بی‌هیچ نشانی از بنای افتخارآفرین رصدخانه. اما پس از آغاز نخستین کاوش کم‌کم رازهای سربه‌مهر این تپه و گنجینه‌ای که در آن نهفته است، برای همگان گشوده و بخشی از بقایای رصدخانه مشهور مراغه آشکار شد. بدیهی است، آنچه اینک به‌دست ما رسیده، نمی‌تواند بیانگر مجد و عظمت این مرکز علمی جهانی باشد، لیکن اطلاعاتی را از نحوه فعالیت دانشمند بزرگ، خواجه نصیرالدین طوسی و تیم همراهش به‌دست می‌دهد.



## برج اصلی رصدخانه عبارت است از یک دایره کامل که قطر داخلی آن ۲۲ متر و قطر خارجی آن ۲۳ متر و شصت سانتی‌متر است

شاید قدیمی‌ترین یادداشت مربوط به **حمدالله مستوفی** سیاح و مؤلف کتاب «**نزهت القلوب**» است. او که در قرن هشتم هجری و سال ۷۴۰ از رصدخانه مراغه دیدار کرده است، چنین می‌نویسد: «بر ظاهر مراغه خواجه نصیرالدین طوسی به فرمان **هلاکو خان** رصدی بسته است و اکنون خراب است.» این یادداشت ۳۸ سال بعد از اتمام فعالیت رصدخانه نگاشته شده و از آن پس تا نیمه اول قرن نهم که **الغیبیگ**، نوه **تیمور**، به هنگام نوجوانی از رصدخانه دیدار کرده است، اطلاعات دیگری در دست نیست. این دیدار کوتاه‌مدت برای **الغیبیگ** انگیزه‌ای می‌شود تا معبد‌های رصدخانه سمرقند را بنا نهد و از دانشمندان و ستاره‌شناسان پیرامون خود می‌خواهد تا با توجه به رصدخانه مراغه به طرح‌ریزی رصدخانه سمرقند و تهیه دستگاه‌های رصد بپردازند.

**غیاث‌الدین جمشید کاشانی**، منجم زمان **الغیبیگ** و همکار نزدیک او، ضمن بازدید از رصدخانه مراغه گزارش نسبتاً کاملی از وضعیت رصدخانه و آلات آن به‌ویژه برج مرکزی تهیه می‌کند و طرحی نیز از آلت ربع جداری می‌کشد که در واقع قدیمی‌ترین سند تصویری مربوط به برج مرکزی است. با توجه به آنچه **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** در نامه خود بیان می‌دارد، روشن است که مجموعه واحدهای نجومی و به‌خصوص قسمت‌های عمده کاربردی برج مرکزی و ربع جداری سنگی متکی به پلکان‌های آن که **غیاث‌الدین** از آن به‌عنوان منبر هندسی یاد کرده است، همچنان تا آن زمان برپا بوده است. اما به احتمال زیاد بنای خود برج فرو ریخته یا لطمه دیده بوده است. زیرا اگر برج برپا بود، از عظمت و شکوه آن یاد می‌کرد.

احتمال دارد واحدهای متفاوت معماری مجموعه رصدخانه مراغه از نیمه دوم قرن نهم هجری که آذربایجان دستخوش تاخت و تاز ترکان «**آق‌قویونلو**» و «**قره‌قویونلو**» واقع می‌شود، ویران شده باشد. به روایاتی نیز، علمای دربار تیموری او را وادار ساختند تا قسمت عمده کتاب‌ها و آلات رصدخانه مراغه را به سمرقند انتقال دهد. این گفته نشانگر آن است که هنوز کتابخانه و عمده ابزار رصد در آنجا وجود داشته است و در صورت صحت این امر، می‌توان احتمال داد، با توجه به روحیه تیمور و علاقه‌ای که او به شکوفایی هر چه بیشتر سمرقند داشته است، ویرانی این بنا به درخواست و دستور او انجام شده باشد.

آنچه که از کاوش‌های سال اخیر به‌دست آمده است، حکایت از مجموعه‌ای دارد که ۱۷ واحد مربوط به هم، زیرمجموعه آن را تشکیل می‌دهند. از اولین واحدهایی که در نگاه نخستین جلب توجه می‌کند، دیوارهای سنگ‌چینی است که بخش‌هایی از آن‌ها کاربرد نجومی داشته و برخی دیگر صرفاً حصار مجموعه به‌شمار می‌رفته است. دیوارهای منظم سنگ‌چین سطح تپه که کاربرد نجومی دارند، شامل دو دیوار می‌شوند: یکی در امتداد شمال به جنوب و دیگری از شرق به غرب که در گوشه شمال‌شرقی محوطه با یکدیگر برخورد می‌کنند. درباره دیوار شرقی-غربی و کاربرد آن در زمینه فعالیت‌های نجومی باید گفت که دیوار مذکور مانند تپه رصدخانه در راستای نیمروز و با دقت و نظم خاص ساخته شده و یکی از دستگاه‌های مهم رصدخانه روی آن قرار می‌گرفته است.

اما مهم‌ترین و اصلی‌ترین واحد رصدخانه برج مرکزی است. برج اصلی رصدخانه عبارت است از یک دایره کامل که قطر داخلی آن ۲۲ متر و قطر خارجی آن ۲۳ متر و شصت سانتی‌متر است. عرض ورودی برج یک و نیم متر است که در دو سوی آن دو سکوی سنگی به ارتفاع ۸۰ سانتی‌متر قرار گرفته‌اند. پس از عبور از ورودی، دو پلکان سنگی به بلندی ۱۳ و ۱۴ سانتی‌متر به داخل برج راه می‌دهند. در برابر ورودی یک راهروی سراسری شمالی-جنوبی وجود دارد. عرض این راهرو سه متر و ده سانتی‌متر است و مهم‌ترین واحد رصدخانه به‌شمار می‌رود، چراکه اصلی‌ترین آلت رصدی به اسم «**ناوسنگی**» یا «**ربع جداری**» در داخل راهرو قرار گرفته است. منظور از ربع جداری، سکویی است در وسط راهرو که قبلاً طول آن هفت و نیم متر بوده، ولی اینک فقط دو متر و بیست سانتی‌متر از طول آن برجامانده است. به ارتفاع این سکو از محل شروع که در سمت جنوب قرار دارد، به‌صورت پلکان و منبری شکل به طرف شمال افزوده می‌شود.

وجود نقاط مبهمی چون فضای محدود کتابخانه برای ۴۰۰ هزار جلد کتاب، این احتمال را قوت می‌بخشد که واحدهای دیگری نیز می‌باید در تپه‌های اطراف مدفون شده باشند که فعلاً مکان و ابعاد آن برای ما مجهول و نامکشوف است. مسلم است که پس از افسول ستاره رصدخانه مراغه و ویرانی آن پس از ۵۵ سال فعالیت، اطلاعات واضحی در مورد وضعیت این رصدخانه در دست نیست.



## تنها اثر شناخته شده و به جای مانده از ابزار و آلات رصدخانه مراغه یک کره فلکی است که در تالار آثار ریاضی - فیزیک موزه دولتی شهر «درسدن» در آلمان نگهداری می شود

برخورد نمی کنیم که افزون بر نوشته های پیشین اطلاعات علمی به ما بدهد.

در سال ۱۳۵۱، هیئتی از سوی دانشگاه تبریز و به سرپرستی دکتر [پرویز] ورجاوند، اولین فصل کاوش را بر روی این اثر تاریخی انجام می دهد که طی آن، چندین واحد معماری از مجموعه رصدخانه مراغه از دل خاک بیرون آورده می شود. فصل دوم و سوم کاوش پس از دو سال وقفه در تابستان ۱۳۵۴ و ۱۳۵۵ به انجام می رسد و بخش دیگری از واحدهای معماری مجموعه کشف می شود. عمده مصالح به کار رفته در بناهای سطح تپه عبارتند از: سنگ، خشت، آجر، ملات، اندود گچ، کاشی و چوب.

درخصوص آلات و ابزار نجومی رصدخانه گفتنی است، در هیچ یک از کاوش ها به غیر از ربع جداری، آلت رصدی دیگری پیدا نشد. اما براساس کتابها و آثار نوشته شده و نیز با توجه به واحدهای معماری می توان از وجود برخی از آلات رصدی در محل رصدخانه مراغه اطمینان یافت. براساس متن رساله مؤیدالدین عرضی که

از دیگر سو اسنادی موجودند که نشان می دهند، شاه اسماعیل صفوی بر آن بود که رصدخانه مراغه را احیا کند. این مطلب نشان می دهد که مجموعه رصدخانه تا قرن دهم هجری از چنان وضعیتی برخوردار بود که امکان بازسازی اش وجود داشت. سال ها بعد، در سال ۱۰۱۹ هجری قمری، شاه عباس صفوی دستور می دهد تا شیخ بهایی، ملاجلال منجم و ملا علی رضا خوش نویس یا همان رضا عباسی کتیبه نگار از محل و آثار رصدخانه مراغه بازدید و نقشه آن را رسم کنند. اما ظاهراً در آغاز قرن یازدهم چیز جالب و چشم گیری از رصدخانه برجای نبوده و در نتیجه توصیف خاصی نیز برجای نمانده است.

اما اولین گزارش رسمی و نسبتاً علمی بررسی آثار سطح تپه مربوط به سال ۱۲۷۶ هجری قمری می شود. در آن سال ناصرالدین شاه قاجار به مراغه رفت و چند روزی در آنجا اقامت کرد. طی این مدت چند نفر از درباریان و از جمله شاهزاده اعتضادالسلطنه، وزیر علوم، فرهاد میرزا، والی آذربایجان، استاد علی محمد اصفهانی،



خود سازنده آلات و ابزار رصدخانه مراغه بوده است، می توان این آلات را طراحی و بازسازی کرد. برخی از این ابزار نجومی عبارتند از: ربع دیواری، ذات الحاق، ذات الربیعین، ذات الاستوانتین و آلت ظلّی. هر کدام از این ابزارها در انجام امور نجومی مربوط به کسوف، خسوف، مختصات افقی ستارگان، تعیین سمت و سینوس زاویه فراز و مانند آن به کار می رفته اند. تنها اثر شناخته شده و به جای مانده از ابزار و آلات رصدخانه مراغه یک کره فلکی است که در تالار آثار ریاضی - فیزیک موزه دولتی شهر «درسدن»<sup>۲</sup> در آلمان نگهداری می شود. گذشته از شواهد تاریخی، در روی خود کره نیز نام سازنده آن، یعنی مؤیدالدین عرضی نقش بسته است.

از ریاضی دانان مشهور زمان، و میرزا احمد حکیم باشی مأمور مطالعه و بررسی تپه شدند و از آنجا نقشه و گزارش تهیه کردند. خود ناصرالدین شاه نیز از محل بازدید به عمل آورد. اما ظاهراً از واحدهای معماری چیزی ثبت نکردند و واحدهای پنج گانه دایره شکل در این نقشه به صورت علامت های هفت گانه طراحی شدند. در مجموع چنان که از نقشه و توضیح تفصیلی آن برمی آید، در سال ۱۲۷۶ هجری قمری از واحدهای هفت گانه چیزی مشهود نبوده است و همه در زیر آوار و خاک قرار داشتند.

اما حدود ۲۴ سال بعد، یعنی در سال ۱۲۹۰ هجری قمری، مقارن با سال ۱۸۸۳ میلادی، یک بار دیگر رصدخانه مراغه مورد بررسی قرار می گیرد و نقشه دیگری از روی آن طراحی می شود. این کار توسط یک آلمانی به نام هوتوم شیندلر<sup>۱</sup> صورت می گیرد. نقشه شیندلر چیزی بیشتر از نقشه قبلی به دست نمی دهد. در این نقشه محل برج مرکزی با دایره بزرگ تر رسم شده و در مجموع ۱۵ واحد دایره ای شکل رسم شده که با واقعیت واحدهای مدور حفاری شده انطباق ندارد. پس از نقشه هوتوم شیندلر دیگر با نوشته ای



## پس از عبور لشکریان مغول آنچه برجای می‌ماند ویرانی است و کشتار و وحشت. به تعبیری تا چندین سال، در گذرگاه مغولان هیچ گیاهی نمی‌روید و هیچ جنبنده‌ای یارای زیستنش نمی‌شود

### چگونگی ساخته شدن رصدخانه

پس از عبور لشکریان مغول آنچه برجای می‌ماند ویرانی است و کشتار و وحشت. به تعبیری تا چندین سال، در گذرگاه مغولان هیچ گیاهی نمی‌روید و هیچ جنبنده‌ای یارای زیستنش نمی‌شود. بدین‌سان روزهای دل‌مرده و غم‌زده‌ی ملتی آغاز می‌شود که پیش از آن در مسیر شکوفایی و پویایی بوده است. اما در این روزهای تاریک و غم‌باد، به ناگاه ستاره‌های دیگر از گنجینه‌های علم این سرزمین درخشیدن آغاز می‌کند و نور امید را بر دل‌های افسرده‌ی مردمان این دیار می‌تاباند. ظهور یگانه‌ی مرد دانشمند این دوران، خواجه نصیرالدین طوسی، این حقیقت را بار دیگر ثابت می‌کند که ملتی که ریشه در آب داشته باشد، هرگز خشک نمی‌شود و هر از گاه و حتی به زمان بیداد، با زدن جوانه‌های بهار و شکوفایی را نوید خواهد داد.

خواجه نصیرالدین طوسی به سال ۵۹۷ هجری قمری در «گهرود» قم و یا به روایتی در «توس» ولادت می‌یابد. علوم فقهی را از پدرش و معقول را از دایی خویش و فریدالدین داماد نیشابوری و علم

ریاضی را از کمال‌الدین یونس موصلی و عباس سعادت اصفهانی می‌آموزد و در معارف زمان خویش به‌ویژه حکمت و ریاضی استاد مسلم و به استاد ابوالبشر ملقب می‌شود. پس از حمله مغول به شهرهای خراسان و ایجاد اغتشاش و بلوا، خواجه نصیر هجرت اختیار می‌کند و به عراق می‌رود. سپس مجدداً به خراسان باز می‌گردد و بالاخره بنا به دعوت ناصرالدین محتشم به «قهبستان»، یکی از قلعه‌های سترک فرقه اسماعیلیه، می‌رود و مدت زیادی در نهایت احترام نزد ناصرالدین محتشم به کار تألیف و تصنیف اشتغال می‌ورزد. خواجه نصیر کتاب «اخلاق ناصری» را به پاس محبت‌های محتشم به‌نام وی تألیف می‌کند. مدتی بعد به خواست علاءالدین، پیشوای اسماعیلیان، به قلعه «الموت» می‌رود و به کار تحقیق و بررسی مشغول می‌شود. نهضت اسماعیلیه در اوج شکوفایی خود به انجام تحقیقات علمی در سطحی پیشرفته توجه خاصی داشت و می‌کوشید دانشمندان بزرگ در زمینه‌های گوناگون را در مراکز عمده خود گرد هم آورد. یکی از علوم مورد توجه اسماعیلیان ستاره‌شناسی و نجوم بود. برپا گشتن قلعه‌های سترک و



مستحکم اسماعیلیان چون الموت، «لمیسر» و قهبستان بر فراز بلندی‌ها، زمینه مناسبی را برای تحقیقات نجومی و شناخت راز آسمان‌ها فراهم می‌آورد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که در قلعه الموت فعالیت‌های نجومی و ستاره‌شناسی دایره بوده است و امروزه کسی در وجود رصدخانه‌ای با آلات و ابزارهای خاص نجومی در این قلعه تردیدی ندارد. حضور شخصیتی چون خواجه نصیر در الموت و بازتاب اعتبار علمی او در سراسر جهان آن روز، بی‌شک بدون پژوهش‌های علمی و نجومی وی در این قلعه امکان‌پذیر نبوده است. همچنین به یاد داشته باشیم که در این قلعه یکی از معتبرترین کتابخانه‌های آن روزگار وجود داشت و این همه بستر مناسبی برای اعتلای علمی



## خواجه نصیرالدین طوسی در کتاب «تجربیدالکلام» خود درباره نور، نظریه ذره‌ای را ارائه داده و به مقایسه آن با انتشار صوت می‌پردازد

ذره‌ای را ارائه داده و به مقایسه آن با انتشار صوت می‌پردازد. وی همچنین شیوه جدید استفاده از ساعت آفتابی را برای رصد کردن کشف می‌کند. او در نتیجه پژوهش‌ها و مطالعات خود ثابت کرد که مثلثات مسطحه علم مستقلی است. خواجه نصیرالدین برای نخستین بار مفهوم اجزای بی‌نهایت، یعنی بی‌نهایت کوچک‌ها را وارد علم می‌کند. بررسی دانشمندان غربی به‌ویژه روسی نشان می‌دهد، خواجه نصیرالدین طوسی بیش از دو قرن قبل از کریستیف کلمب<sup>۱</sup>، مختصات جغرافیایی قاره آمریکا را کشف و محاسبه کرده است که نشان از نبوغ فوق‌العاده وی دارد. همچنین آرا و نظرهای فلسفی و کلامی خواجه مورد توجه فیلسوفان و متکلمان بعد از خود بوده است. به‌طور کلی، خواجه در حکمت، پیرو حکمای مشا و فلسفه‌اش در میان حکمای اسلامی تابع فلسفه ابوعلی سینا بود. با این حال وی حکیمی متکلم و در کلام متمایل به فلسفه است و به عبارت دیگر، دارای روشی بین فلسفه و کلام است. این همه تنها بخشی از دانش و معرفت گسترده خواجه نصیرالدین طوسی است که در مواجهه با دیگران تکریم و احترام همگان را برمی‌انگیزد. اما خود خواجه که دستی هم در سرودن شعر داشت در این راستا چنین می‌گوید:

اندر ره معرفت بسی تاخته‌ام

واندر صف عارفان سر افراخته‌ام

چون پرده ز روی دل برانداخته‌ام

بشناختم که هیچ نشناخته‌ام

و یا در جای دیگری درباره عظمت ناشناخته‌ها در مقابل دانسته‌هایش چنین می‌گوید:

هر چند همه هستی خود می‌دانیم

چون کار به ذات می‌رسد حیرانیم

بالجمله به دوک پیرزن می‌مانیم

سر رشته به دست ما و سرگردانیم

خواجه نصیر پس از عمری تلاش به سال ۶۷۲ هجری قمری، زمانی که به همراه آباق‌خان، فرزند به تخت نشسته هلاکوخان، برای گذران زمستان و نیز سرکشی موقوفات به بغداد رفته بود، جان به جان آفرین تسلیم می‌کند. بنا به وصیتش در جوار حرم مطهر حضرت موسی کاظم(ع) در کاظمین دفن می‌شود. با مرگ این ستاره درخشان قرن هفتم هجری قمری، ایران به یکباره یکی از ستون‌های علمی خود را از دست می‌دهد و تنها به داشتن آثار و تألیفات ارزنده خواجه، به‌ویژه بنیاد مرکز تحقیقات علمی و ستاره‌شناسی رصدخانه مراغه که به نوعی نخستین آکادمی بین‌المللی علوم ستاره‌شناسی جهان است، دل خوش می‌دارد.

خواجه نصیر بود تا شهرتش مرزها را درنوردد و به دربار منگوقاآن، نوه چنگیزخان در چین برسد. به‌طوری که منگوقاآن خواجه نصیر را برای ایجاد رصدخانه‌ای بزرگ در چین در نظر بگیرد.

اما تقدیر برای خواجه مسیر دیگری را رقم می‌زند. وی تا پایان عمر علاءالدین و سپس در دوران پیشوایی فرزندش، خورشاه در قلعه الموت روزگار می‌گذراند. مدتی بعد هلاکو، برادر منگوقاآن، به ایران و همچنین قلعه الموت حمله می‌برد و آنجا را به محاصره درمی‌آورد. پس از رفت‌وآمدهای بسیار فرستادگان دو طرف و صلاحدید خواجه، خورشاه تسلیم هلاکوخان می‌شود و به همراهش جمعی از دانشمندان و به‌ویژه خواجه نصیر نیز به اسارت هلاکو درمی‌آیند. هلاکو که از دیرباز با نام خواجه نصیر و شهرت علمی او آشنایی داشت، او را محترم می‌شمرد و به وساطت او، تمامی دانشمندان خورشاه مورد توجه قرار می‌گیرند. بدین‌سان زمینه‌های فعالیت نجومی در دوران هلاکوخان مغول که بهره‌ای از دانش و علم نبرده بود، فراهم می‌آید. هلاکوخان پس از فتح قلعه‌های اسماعیلیان عزم فتح بغداد می‌کند و با تدبیر و سیاست خواجه نصیر می‌تواند بغداد را فتح کند و به خلافت عباسیان پایان دهد. پس از آن خواجه نصیر علاقه‌ای به امور دیوانی نشان نمی‌دهد و با توجه به شخصیت کم‌نظیر و زیرکی خاصی که داشت، هلاکوخان را به شدت تحت تأثیر خویش قرار می‌دهد و او را به ایجاد یک مرکز علمی کم‌سابقه وامی‌دارد. خواجه نصیرالدین طوسی با این کارش علاوه بر انجام تحقیقات علمی، مانع القانات منجمینی می‌شود که از ناآگاهی مغولان استفاده می‌کردند و با ارائه خرافات به‌عنوان تحقیقات فلکی و نجومی به سودجویی می‌پرداختند.

با تأسیس بزرگ‌ترین بنیاد علمی و نجومی رصدخانه مراغه به سال ۶۵۷ هجری قمری، خون تازه‌ای در رگ‌های جامعه علمی - پژوهشی ایران جریان یافت و دانشمندان و ستاره‌شناسان از همه سوی این سرزمین به طرف رصدخانه عظیم مراغه به راه می‌افتند و دوران شکوفایی علمی و نجومی این دیار در دل ویرانی و خشونت مغولان ناباورانه آغاز می‌شود. بدون شک خواجه نصیرالدین طوسی با داشتن معلومات وسیع و ذکاوت خاص خود، نه تنها یگانه دوران خود بود، بلکه هم‌اینک نیز نوشته‌های وی توجه دانشمندان غربی را به خود جلب می‌کند. بی‌دلیل نیست که جهان علم به پاس خدمات ارزنده وی، نام خواجه نصیر را در نصف‌النهار ۴۱ جنوبی و مدار صفر کره ماه ثبت کرده است. خواجه نصیر در عرصه‌های متفاوت علمی سرآمد روزگار خود بود و در زمینه‌های گوناگون ریاضیات، نجوم، هیئت، علم رمل، اخلاق، تفسیر، معدن‌شناسی، تاریخ، فقه، جغرافیا، علم طب، تعلیم و تربیت، شعر، منطق و بالاخره علم کلام کتاب‌ها و رساله‌هایی را تألیف کرده است. تعداد آثار به‌جای مانده از خواجه نصیر را ۱۹۰ اثر تألیفی ذکر کرده‌اند که به زبان‌های عربی و فارسی نگاشته شده‌اند.

خواجه در کتاب «تجربیدالکلام» خود درباره نور، نظریه

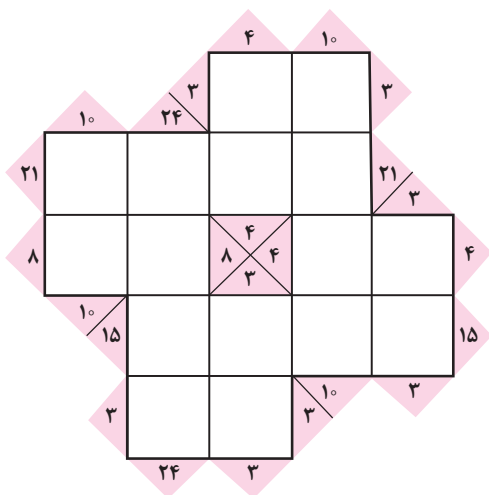
\* پی‌نوشت‌ها.....

1. Houtum Schindler
2. Dresden
3. Christopher Columbus

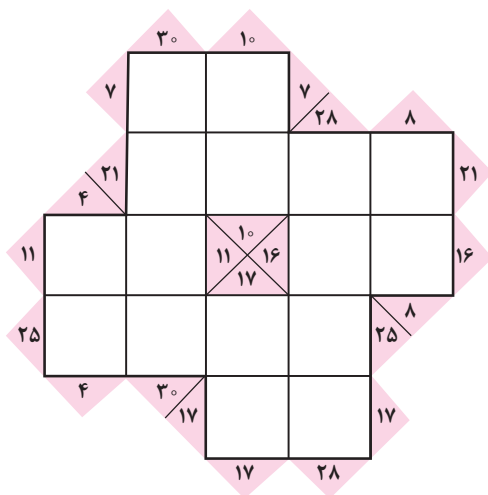
## ایستگاه اول



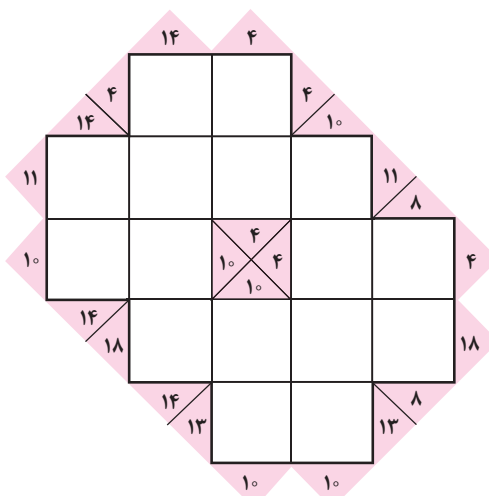
در شماره قبل (شماره بهمن ماه) با جدول های «کاکورو» آشنا شدید. دیدیم که منطق حل این جدول ها بسیار ساده است. عددهای حاشیه جدول معرف مجموع عددهایی است که باید در خانه های زیرین، یا بالایی و یا سمت راست یا چپ آن خانه قرار گیرند. اکنون تلاش کنید که این چهار جدول را نیز حل کنید و با قرار دادن عددهای طبیعی مناسب، سازگاری جدول را نشان دهید.



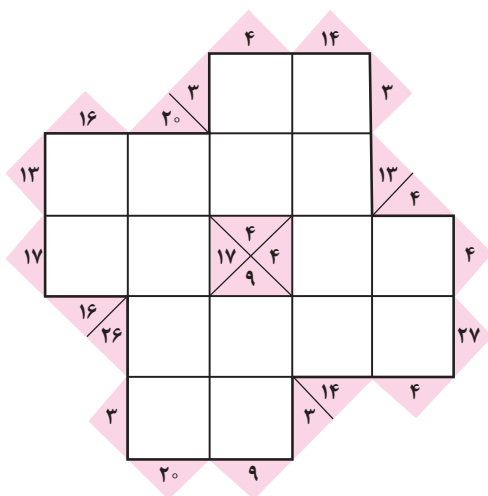
۳



۱



۴



۲



## اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

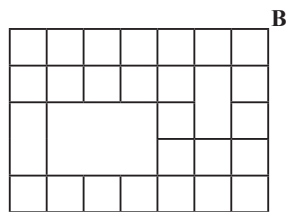
مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طبقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:  
مسئله‌ها

۲۶۶. مجموع ۲۰ عدد طبیعی برابر است با ۴۶۲. بزرگ‌ترین عامل مشترک این ۲۰ عدد حداکثر چقدر است؟

۲۶۷. مقدار  $a$  را بیابید، به طوری که معادله زیر دقیقاً یک ریشه داشته باشد.

$$|x| + |x-1| + \dots + |x-1396| = a$$



۲۶۸. در شکل مقابل چند مسیر از  $A$  به  $B$  وجود دارد؟ حرکت‌های مجاز پایین به بالا و چپ به راست هستند.

۲۶۹. از یک جدول مربعی به ضلع  $n=6k+1$  یک خانه  $1 \times 1$  را حذف کرده‌ایم. ثابت کنید جدول حاصل را می‌توان با موزاییک‌هایی به شکل  $\square$  فرش کرد.

۲۷۰. از یک جدول  $5 \times 5$ ، کدام خانه  $1 \times 1$  را اگر حذف کنیم، می‌توانیم بقیه خانه‌ها را با موزاییک‌هایی به شکل  $\square$  فرش کنیم؟

۲۶۱. همه اعداد حقیقی  $x$ ،  $y$  و  $z$  را بیابید، به طوری که:

$$x + \sqrt{x} = 2y, y + \sqrt{y} = 2z, z + \sqrt{z} = 2x$$

۲۶۲. چند زوج از اعداد طبیعی می‌توان یافت، به طوری که مجموع آن‌ها برابر ۱۳۹۵ و حاصل ضرب آن‌ها مضرب ۱۳۹۵ باشد.

۲۶۳.  $2n$  نقطه در صفحه مفروض هستند. ثابت کنید می‌توان با  $n$  پاره‌خط دوجه‌دو نامتقاطع، این نقاط را به هم وصل کرد، به طوری که هر نقطه روی دقیقاً یک پاره‌خط باشد.

۲۶۴. مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  مفروض است. نقطه  $E$  روی  $AB$  و نقطه  $F$  روی  $AC$  مفروض‌اند؛ به طوری که  $EF$  و  $BC$  موازی‌اند. اگر  $O$  مرکز ثقل مثلث  $AEF$  و  $M$  نقطه میانی  $EC$  باشد، مطلوب است اندازه زاویه  $OBM$ .

۲۶۵. همه اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید که به صورت تفاضل دو مکعب کامل باشند.

## بخش دوم: راه حل‌ها

۲۳۱. به ازای چه مقادیری از  $\{1, 2, \dots, 15\}$ ،  $n \in \mathbb{N}$ ،  $n^n + 1$  اول است؟  
 $\frac{xy}{x+y} = -6$  نتیجه می‌شود:  $xy = -6x - 6y$ . تساوی آخر را در ۵ ضرب می‌کنیم:  $5xy = -30x - 30y$  و بعد به جای  $5y$  قرار می‌دهیم  $-4x$  و از آن جا داریم:

$$-4x^2 = -30x + 24x \rightarrow 4x^2 - 6x = 0$$

$$\rightarrow 4x(x-1.5) = 0$$

پس:  $x=0$  یا  $x=1.5$ . در نتیجه  $y=0$  یا  $y=-1.2$ . اما  $x=y=0$  قابل قبول نیست و جواب  $(x,y)=(1.5,-1.2)$  در معادلات صادق است. مقدار خواسته شده برابر با  $-1.5$  خواهد بود.

۲۳۵.  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی هستند. کمترین مقدار عبارت زیر را بیابید:

$$S = (x+3)^2 + 2(y-2)^2 + 4(x-7)^2 + (y+4)^2$$

با بسط عبارت بر حسب توان‌های  $x$  و  $y$  و ساده کردن می‌توانید به حاصل زیر برسید:

$$S = 5(x-5)^2 + 3y^2 + 104$$

در نتیجه کمترین مقدار عبارت برابر است با  $104$  (کافی است  $x=5$  و  $y=0$  باشد).

۲۳۶. همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که طول یکی از اضلاع آن برابر  $6$  باشد و طول اضلاع آن یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند.

فرض کنید طول سه ضلع  $a$ ،  $a-d$  و  $a+d$  باشند. در نتیجه:

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ad + d^2 + a^2 = a^2 + 2ad + d^2$$

که نتیجه می‌دهد:  $a^2 = 4ad$ . چون  $a > 0$ ، در نتیجه:  $a = 4d$ . با جای‌گذاری نتیجه می‌شود که طول اضلاع  $3d$ ،  $4d$  و  $5d$  هستند. اکنون سه حالت در نظر می‌گیریم.

۱. اگر:  $3d = 6$ ، آن‌گاه طول اضلاع عبارت است از:  $6$ ،  $8$  و  $10$ .

۲. اگر:  $4d = 6$ ، آن‌گاه طول اضلاع  $3$ ،  $4.5$  و  $7.5$  خواهد بود.

۳. اگر:  $5d = 6$ ، طول اضلاع مثلث برابر با  $3.6$ ،  $4.8$  و  $6$  خواهد بود.

۲۳۷. معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$\log_4^x - \log_x^{16} = \frac{y}{6} - \log_x^{\frac{1}{6}}$$

۲۳۱. به ازای چه مقادیری از  $\{1, 2, \dots, 15\}$ ،  $n \in \mathbb{N}$ ،  $n^n + 1$  اول است؟

$n=1$  جواب می‌دهد ( $n^n + 1 = 2$ ). اگر  $n$  عامل اول فردی مانند  $P$  داشته باشد، آن‌گاه حاصل مرکب خواهد بود. چرا که حاصل را می‌توان به شکل  $a^{n^n} + 1$  نوشت و  $n^n + 1$  بر  $n^n + 1$  بخش پذیر است. پس  $n$  تنها می‌تواند توانی از  $2$  باشد. با بررسی این اعداد، تنها جواب‌ها  $1$ ،  $2$  و  $4$  خواهند بود.

۲۳۲. فرض کنید:  $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)$ . اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)^{115}$  بر  $f(x^2)$  برابر  $ax+b$  باشد، آن‌گاه  $9a+b$  چقدر است؟

$$f(x)^{115} = f(x^2)Q(x) + ax + b$$

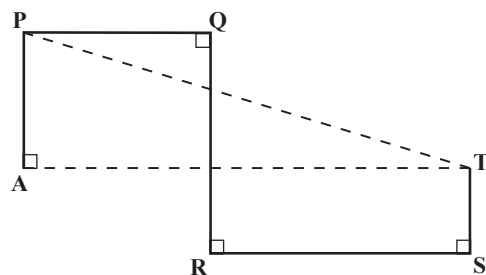
با جای‌گذاری  $1$  و  $-1$  به جای  $x$  داریم:

$$f(1)^{115} = a + b, f(-1)^{115} = -a + b$$

$$\Rightarrow a + b = 0, -1 = -a + b \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow 9a + b = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

۲۳۳. در شکل زیر  $PQ$  بر  $OR$ ،  $OR$  بر  $QR$  و  $RS$  بر  $ST$  عمود هستند. همچنین  $PQ=4$ ،  $RS=QR=8$  و  $ST=3$ . طول  $PT$  را به دست آورید.



به راحتی می‌توانید در مثلث قائم‌الزاویهٔ  $PAT$  نشان دهید:  $AT=12$  و  $PA=5$  در نتیجه:

$$PT = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

۲۳۴. با فرض  $\frac{x-y}{x+y} = 9$  و  $\frac{xy}{x+y} = -6$  مطلوب است حاصل  $(x+y) + (x-y) + xy$

از:  $\frac{x-y}{x+y} = 9$  نتیجه می‌شود:  $xy = -4x$  و  $5y = -4x$  از:

با فرض  $t = \log_x^x$ ، به معادله  $\frac{t}{3} = \frac{7}{6} + \frac{1}{t}$  می‌رسیم. در نتیجه  $t$  باید ۳ یا  $-\frac{2}{3}$  باشد. بنابراین  $x$  برابر است با ۸ یا  $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ .

**۲۳۸.** چند عدد ده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان ساخت به طوری که چهار رقم متوالی آن ۱۲۲۱ نباشد؟

به‌طور کلی  $10^4$  عدد ۱۰ رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان ساخت. حال سعی می‌کنیم اعداد نامطلوب را در نظر بگیریم. در یک عدد ۱۰ رقمی، برای چهار رقم ۱، ۲، ۲، ۱ موقعیت وجود دارد. در نتیجه  $7 \times 2^6 = 448$  عدد ۱۰ رقمی نامطلوب وجود دارد. اما در این شمارش بعضی از اعداد نامطلوب را چندبار شمرده‌ایم که باید آن‌هایی را که چندبار شمرده‌ایم، محاسبه کنیم و در نظر بگیریم. اگر ۱، ۲، ۲، ۱، دو بار در یک عدد ۱۰ رقمی ظاهر شود و یک رقم مشترک داشته باشند، چهار حالت زیر را خواهیم داشت:

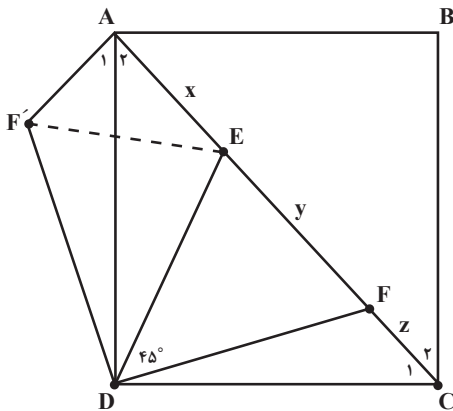
$1221221xxx$  و  $xx1221221x$  و  $xxx1221221$

که هر کدام با در نظر گرفتن حالت‌های ممکن برای  $x$ ، ۳ عدد تولید می‌کنند. پس  $32 = 4 \times 8$  عدد خواهد بود. از طرف دیگر، عدد ۱۲۲۱۲۲۱۲۲۱ در این ۳۲ عدد، دو بار شمرده شده است. پس ۳۰ عدد نامطلوب وجود دارد که دو بار عبارت ۱۲۲۱ در آن‌ها ظاهر شده است و این دو عبارت ۱، ۲، ۲، ۱، یک رقم مشترک دارند.

حال اگر اعدادی را بشماریم که عبارت ۱، ۲، ۲، ۱، دو بار بدون رقم مشترک در آن‌ها ظاهر شده باشد، به عدد  $1 = 2^2 - 6 \times 2^2 = 23$  می‌رسیم (اثبات به عهده خودتان). در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با:

$$1024 - (448 - 23 - 30 - 2) = 631$$

**۲۳۹.** در شکل، ABCD یک مربع است و نقاط E و F روی قطر AC قرار دارند.  $\angle EDF = 45^\circ$ ، اگر  $EF = y$ ،  $AE = x$  و  $FC = z$  ثابت کنید:  $y^2 = x^2 + z^2$ .



مثلث  $ADF'$  را هم‌نهشت با مثلث  $CDF$  و در خارج مربع رسم کنید. در نتیجه زاویه  $A_1$  برابر با زاویه  $C_1$  خواهد بود. بنابراین زاویه قائمه  $F'AE$  خواهد بود. از طرف دیگر:  $AF' = CF = z$  همچنین:

$$\angle F'DE = \angle ADE + \angle FDC = 45^\circ \text{ و } F'D = DF$$

مثلث  $F'DE$  و  $EDF$  هم‌نهشتند (به حالت دو ضلع و زاویه بین) که نتیجه می‌شود:  $F'E = EF = y$ . حال اگر در مثلث قائم‌الزاویه  $AF'E$  رابطه فیثاغورس را بنویسید، حکم نتیجه می‌شود.

**۲۴۰.** مختصات سه رأس مثلثی عبارت‌اند از  $(5, 3)$ ،  $(1, 4)$  و  $(5, c)$ . مجموع همه مقادیر  $c$  را بیابید، به طوری که مثلث مذکور مساحتی برابر ۱۴ داشته باشد.

با رسم شکل در صفحه مختصات نتیجه خواهیم گرفت که عمود وارد بر ضلعی که دو نقطه  $(5, 3)$  و  $(5, c)$  را بهم وصل می‌کند، طولی برابر ۴ دارد. در نتیجه اگر خواهیم مساحت مثلث ۱۴ باشد، باید طول این ضلع یعنی  $|c - 3|$  برابر ۷ باشد. در نتیجه:  $c = 10$  یا  $c = -4$ . پس پاسخ مسئله برابر  $10 - 4 = 6$  خواهد بود.

### پیکار جو!

پرسش‌های

بیشترین مساحت قطاعی که محیط آن مساوی ۴۰ واحد است، در کدام گزینه دیده می‌شود؟

(الف)  ۸۰

(ب)  ۱۰۰

(ج)  ۱۱۰

(د)  ۱۲۰

(ه)  ۱۲۵



در شماره‌های پیشین دربارهٔ سوالیه‌ها و سربازها مطالبی داشتیم و دیدیم که سوالیه‌ها همیشه راست می‌گفتند و سربازها همیشه دروغ گو بودند. اما حالا می‌خواهیم به شهری عجیب در زیرزمین برویم! در این شهر عجیب تاریکی مطلق حکم فرماست و نور خورشید هرگز به آنجا راه ندارد. با این حال همهٔ شهروندان به‌طور غریزی زمان روز و شب را می‌دانند، با اینکه در آنجا هیچ نوع ساعت یا زمان‌سنج دیگری وجود ندارد. شهروندان این شهر بر دو نوع‌اند: سوالیه‌های روز و سوالیه‌های شب! سوالیه‌های روز، در طول روز راست می‌گویند و در طول شب دروغ می‌گویند و برعکس، سوالیه‌های شب، شب‌ها راست می‌گویند و روزها دروغ‌گویند. حالا با این مقدمات شما را به چالش با چند معمای جالب دعوت می‌کنیم:

## ایستگاه دوم

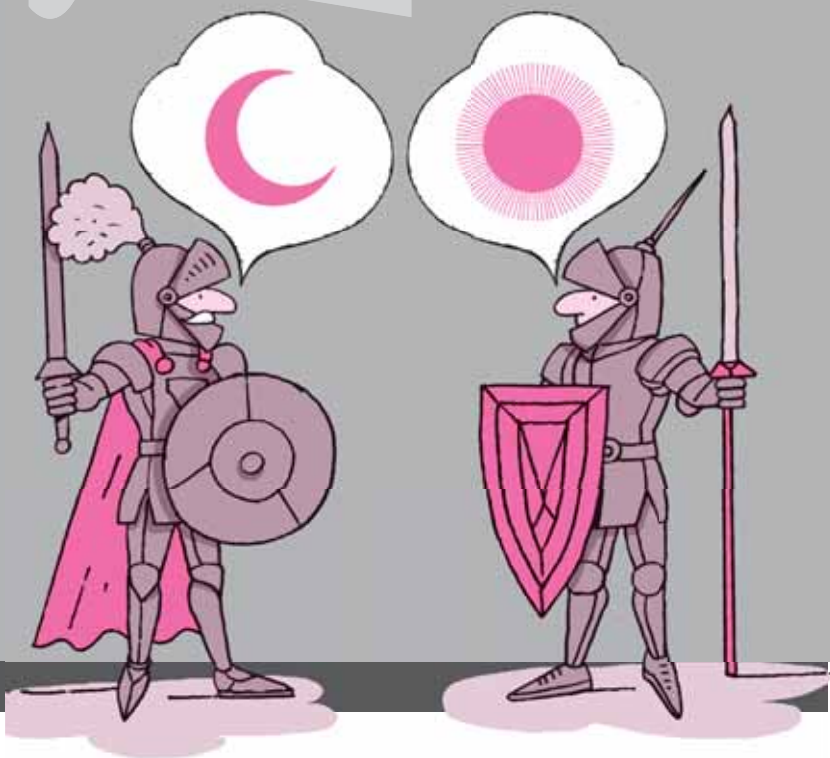
۳. فرض کنید از کنار شهروندی رد شدید که می‌گوید: «در ساعات روز، من می‌گویم اکنون شب است.» آن موقع، روز است یا شب؟

۲. فرض کنید به‌جای آنکه بخواهید بدانید که آن موقع روز است یا شب، می‌خواهید بدانید که آیا شهروندی که با او صحبت می‌کنید، سوالیهٔ روز است یا شب. چگونه می‌توانید با یک پرسش (با جواب بله یا خیر) متوجه این موضوع شوید؟

۱. فرض کنید شما وارد این شهر شده‌اید و نمی‌دانید که اکنون روز است یا شب. چگونه می‌توانید با یک پرسش (با جواب بله یا خیر) از اولین شهروندی که با او روبه‌رو می‌شوید، متوجه این موضوع شوید؟

۴. شهروندی دیگر می‌گوید: «در طول روز، من می‌گویم که یک سوالیهٔ شب هستم، اما من واقعاً سوالیهٔ روز هستم.» او سوالیهٔ شب است یا روز؟ چه زمانی این حرف را زده است؟

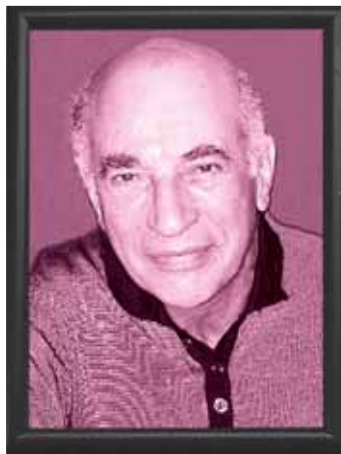
۵. شهروندی دیگر گفت: «من یک سوالیهٔ شب هستم و حالا روز است.» آن موقع روز بود یا شب؟



# چه نامی بهتر از برهان!

کارهای ارزنده بزرگانی چون استاد دکتر پرویز شهریاری را می‌ستاید و یاد و خاطره ایشان را گرامی می‌دارد.

۱۰۰ شماره، هر شماره حدود ۵۰ صفحه و هر صفحه حدود ۵۰۰ کلمه و نماد! آن‌ها که با کار نشر سروکار دارند، همت بلند این نویسندگان زبردست و شیفتگان ترویج علم و ریاضیات را ارج می‌نهند و تداوم تلاششان را آرزو می‌کنند. از پیشنهاد مطرح شده در نشست مورخ دهم خردادماه سال ۱۳۹۵ در «دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی» در خصوص چاپ و نشر «افسانه پادشاه و ریاضی‌دان» به سبک داستان در چند شماره پایانی ماهنامه استقبال کردم و از هم‌اکنون مقدمات اجرای آن را فراهم آورده‌ام. امیدوارم این مهم در یکی از شماره‌های فصل پاییز آغاز شود، پس از یکی دو سال پایان یابد و مجموعه آن به صورت کتابی پرکشش در اختیار علاقه‌مندان قرار گیرد.



**دکتر مهدی بهزاد**  
چهره ماندگار ریاضی ایران  
و استاد بازنشسته دانشگاه‌های کشور

ضمن توجه به ظاهر جذاب آن، روی برخی از مقالات تعمق می‌کند، کارنامه این بزرگان را بس درخشان می‌داند و به تکتک آنان درود می‌فرستد. همچنین

## کارنامه‌ای بس درخشان

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی «رشد برهان ریاضی» که برای دانش‌آموزان دوره متوسطه دوم منتشر می‌شود، به صدمین شماره خود رسیده است. جا دارد به همین مناسبت یکی از دست‌اندرکاران محترم، تاریخچه و فراز و نشیب‌های این مجله پرآوازه را بنویسد و چاپ و منتشر کند. نویسنده که افتخار آشنایی با سردبیر محترم مجله، حمیدرضا امیری، و مدیر داخلی آن، هوشنگ شرقی و بسیاری از اعضای فرهیخته هیئت تحریریه را دارد و گه‌گاه که به شماره‌های تازه از مجله دست می‌یابد،

من اولین مقاله ریاضی‌ام را در همان نشریه (که بیشتر از چهار شماره دوام نیارود) به چاپ رساندم (معادله درجه سوم و کلیدی دیگر). با وجود آنکه کیفیت چاپ و نگارش و طراحی مجله بسیار ابتدایی بود، ولی اولاً مطالب آن درخور اعتنا بود و ثانیاً استقبال بسیار خوبی هم از طرف دانش‌آموزان منطقه و حتی منطقه‌های مجاور از آن به عمل می‌آمد که البته بیانگر حقایق بسیاری است.

\*\*\*

بعد از آنکه آن جمع و نشریه‌شان از هم گسست، اشتیاق من برای پیوستن به یک مجله ریاضی و ادامه آن کار ناتمام، صدچندان شد. در همان سال‌ها بود که با «مجله یکان» که توسط مرحوم **عبدالحسین مصحفی** و در فاصله سال‌های ۱۳۵۶-۱۳۴۲ منتشر می‌شد، آشنا شدم و نسخه‌هایی از آن را دیدم و این سؤال بزرگ برایم پیش آمد که: چرا بعد از این همه سال نباید یک ماهنامه ریاضی ثابت و فراگیر در کشور ما منتشر شود؟



**هوشنگ شرقی**  
مدیر داخلی و عضو هیئت تحریریه مجله

منطقه ۱۰ آموزش و پرورش تهران فعالیت می‌کردیم و با حمایت مسئول این بخش - که از مسئولان فعلی مجله «رشد» است - نشریه‌ای دست‌نویس را در چند صفحه منتشر می‌کردیم و اسمش را هم گذاشته بودیم: «چرتکه» که گاهی بچه‌ها به طنز می‌گفتند: «چرتکه که!»

## برهان گنجی گرانمایه!

پیرما ما را سخن گفتن بیاموخت  
من به او عهدی گرانمایه ببستم  
بهر ما گنجی گرانمایه بیندوخت  
من به او و راه و رسمش دل ببستم

از آن هنگام که خودم را شناختم، فهمیدم به نوشتن تعلق خاطری دارم و این را از تشویق معلمانم در درس ادبیات و انشا بیشتر متوجه می‌شدم. اما نخستین مطلبی (مقاله‌ای) که درباره ریاضیات نوشتم، داستانی دیگر دارد و روایت آن به سال ۱۳۶۹، یعنی ۲۶ سال قبل برمی‌گردد. آن زمان، جمعی از دوستان علاقه‌مند به ریاضی بودیم که در گروه‌های آموزشی اداره



## آشنایی من با برهان (از برهان راهنمایی تا دبیرستان!)



محمد طبیعی

دانشجوی رشته برق - دانشگاه صنعتی شریف

شده است. این انسان‌ها ظاهر، فکر، عقیده و استعدادهای...؛ در ادامه همین بحث بود که آقای عرفانی مجله رشد را به عنوان منبعی خوب به ما معرفی کرد و گفت: «می‌توانید علاقه‌های خود را با آن محک بزنید.» از آنجا

آشنایی من با مجله برهان به هفت سال پیش باز می‌گردد؛ زمانی که من در پایه دوم راهنمایی تحصیل می‌کردم. آن سال درسی به نام «اجتماعی» داشتیم که به آموزش ضوابط و ویژگی‌های جامعه می‌پرداخت.

آقای عرفانی، معلم اجتماعی ما، فرد جوان و آگاهی بود. دقیقاً یادم نمی‌آید که در کدام درس بودیم، ولی بحث پیرامون خدماتی بود که جامعه به مردم ارائه می‌دهد؛ مانند ساختن مسجد، ورزشگاه، پژوهشگاه، کتابخانه و...

مضمون جملات ایشان چنین بود: «جامعه از مردم و از انسان‌های مختلفی تشکیل

که من به ریاضی بیشتر از علوم علاقه داشتیم، مجله ریاضی رشد برهان را انتخاب کردم. در اواسط آذر بود که مدرسه این مجله را به من داد. تا قبل از آن جز کتاب ریاضی مدرسه و یک کتاب کار که به پیشنهاد معلم ریاضی تهیه کرده بودیم، هیچ چیز دیگری در زمینه ریاضیات مطالعه نکرده بودم. به همین خاطر، این مجله برایم تازگی و جذابیت خاصی داشت. من واقعا از خواندن مجله ذوق زده شده بودم. تقریباً از آن دوران به بعد خواننده پیگیر برهان شدم و آرشبو چهار سال این مجله را به طور کامل دارم. به واسطه مطالعه این مجله با بحث‌های زیادی آشنا شدم. مقالاتی مانند «المپیاد ریاضی در کشورهای مختلف»، «با راهیان المپیاد ریاضی» و «پای تخته» باعث آشنایی من با سوالات المپیاد ریاضی و فعالیت من در این زمینه شد. در نهایت جا دارد که از مسئولان و دست‌اندرکاران مجله که انصافاً برخورد بسیار خوبی با این حقیر داشتند و مشوق من در این عرصه بودند هم سپاس‌گزاری کنم.

که طی بیش از دو دهه انجام گرفت و به یاری خدای منان و لطف مسئولان «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» وزارت آموزش و پرورش، بالاخره این آرزو از مهرماه سال گذشته محقق شد. اکنون یک آرزوی دیگر دارم و امیدوارم روزی را بینم که یک مجله ریاضی کثیرالانتشار در پیشخوان روزنامه‌فروشی‌ها عرضه شود و مانند یکان، دانش‌آموزان برای رسیدن آن لحظه‌شماری کنند، برای خریدن آن صف بکشند و چه بهتر که نام آن برهان باشد! به امید آن روز و به امید انتشار دویستمین شماره برهان!

شادباد روزگارتان

خدمت‌گزار همه جوانان سرزمین پاک ایران

\* پی‌نوشت‌ها.....

۱. قبل از انقلاب، وقتی کلاس اول راهنمایی بودم، دبیر ادبیاتمان که علاقه‌ای وافر بین ما بود، نوشتن انشایی با عنوان «می‌خواهید در آینده چه کاره بشوید؟» را به ما تکلیف کرد. انشایی نوشتم که به عنوان بهترین انشای آن دوره انتخاب شد و در آن نوشتم که می‌خواهم در آینده، معلم و نویسنده شوم!
۲. روزنامه شرق، ویژه‌نامه سالگرد گذشت زنده‌یاد پرویز شهریاری، شماره ۱۷۳، یکشنبه ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۲، صفحه ۸، با عنوان «کسی که مثل هیچ‌کس نیست»

برهان را یکی از عزیزترین داشته‌هایم دانسته‌ام و از اینکه می‌دیدم در بعضی محافل خاص، گاهی عده‌ای از سر حسادت یا نادانی، به این مجله و ساحت آن بی‌حرمتی کرده‌اند، سخت برافروخته می‌شدم. چرا که باور داشته‌ام، وجود یک مجله ریاضی در کشور، حتی با شمارگان اندک، و حتی اگر باعث تحول فقط یک نفر (دانش آموز، معلم و یا...) بشود و او را به رشته ریاضی علاقه‌مند کند، مغتنم است و به توسعه فرهنگ علمی ایران عزیز ما کمک می‌کند. چه رسد به مجله‌ای که بسیاری از فرهیختگان عرصه فرهنگ به تناوب در آن قلم زده‌اند، که زنده‌یاد شهریاری گل سرسبد آنان بود. من به راستی به او و راه و رسمش دل بسته بودم و شعری که در مطلع این نوشته آمد، ادای دین من به این بزرگوار است.

\*\*\*

از ابتدای تولد برهان، که بخشی از آرزوهای ما را در ایجاد یک نشریه ثابت ریاضی برآورده کرد، آرزوی دیگر من این بود که روزی برهان ماه‌نامه شود و جای خالی مجله یکان را پر کند. بعد از تلاش‌هایی

به همین خاطر بود که وقتی در همان ایام و از سال ۱۳۷۰ انتشار مجله «رشد برهان ریاضی» به همت آقای امیری و دوستان دیگر آغاز شد، بی‌نهایت مسرور شدم. به خصوص وقتی نام آشنای استاد پرویز شهریاری را هم در میان همکاران مجله دیدم، خوش‌حال‌تر شدم و کوشیدم با مجله و نیز با استاد شهریاری ارتباط برقرار کنم. حاصل این تلاش، آن‌گونه که در ویژه‌نامه یکی از روزنامه‌ها که برای یادبود استاد منتشر شد، گفته‌ام، رسیدن به استاد و مجله برهان و عضویت در هیئت تحریریه آن در سال ۱۳۷۵ بود. نخستین مقاله‌ام در برهان ۲۷ را هرگز فراموش نمی‌کنم: «معماهایی با ماهیت ریاضی» که به جد باور دارم، از بهترین مقاله‌هایی است که در تمام این سال‌ها نوشته‌ام.

\*\*\*

در این ۲۰ سالگی که در هیئت تحریریه برهان بوده‌ام، همواره (چه آن هنگامی که عضو هیئت تحریریه بودم، و چه در این چند سال اخیر که مدیر داخلی مجله هم بوده‌ام) مجله

## ارتباط ریاضیات و شعر در گفت و گو با مجید امیری

# جوهره شعر و ریاضیات

### اشاره

چندی پیش کتابی به دستمان رسید با عنوان «خط خیال» که مجموعه‌ای است از شعرهای یک معلم دردمند ریاضی از «زرقان» شیراز. مجید امیری متولد ۱۳۵۸ و دانش‌آموخته رشته ریاضی و معلم این رشته است. ولی در عین حال شخصیتی به غایت لطیف دارد و این لطافت طبع او را به سمت شعر و شاعری کشانده است. جالب اینجاست که شعرهای او یک تم غالب ریاضی دارند و البته سرشارند از لطافت، ایهام و کنایه‌هایی به زبان ریاضی. از جمله این شعر که مسمای کتاب ایشان هم از آن است:

چون نقطه، ما ز صفحه عالم بریده‌ایم

در امتداد «خط خیال» آرمیده‌ایم

این منحنی قامت ما را مبرز یاد

در مختصات چشم تو آن را کشیده‌ایم!

با دیدن این مجموعه، شوق بسیاری به دیدن این عزیز پیدا کردیم و سفر به شیراز و بهانه شرکت در «چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران» فرصتی مغتنم برایمان فراهم کرد تا دیداری و گفت‌وگویی نه‌چندان کوتاه با ایشان داشته باشیم. در این دیدار آقایان هوشنگ شرقی (مدیر داخلی مجله) و عنایت‌الله راستی‌زاده (از دبیران خوش‌نام ریاضی شیراز و از همکاران قدیمی مجله) شرکت داشتند. حاصل آنچه را که با ایشان گفتیم و شنیدیم، در پی می‌خوانید.

**شرقی:** امروز دوشنبه پانزدهم شهریور ۱۳۹۵، در خدمت آقای مجید امیری، از دبیران ریاضی استان فارس و نگارنده دیوان شعر خط خیال هستیم. شعرهای کتاب ایشان ریاضیات به زبان شعر یا شعر به زبان ریاضی! است.

آقای امیری، همان‌طور که خودتان هم در مقدمه کتابتان اشاره کرده‌اید، **هانری پوانکاره**، فیلسوف و ریاضی‌دان فرانسوی (یا به قولی و ایراشتراوس) می‌گوید: «ریاضی‌دان کامل باید تا حدی هم شاعر باشد». در مقابل، پروفیسور **هشترودی**، ریاضی‌دان معاصر کشور خودمان می‌گوید: «هر شاعری باید ریاضی‌دان باشد». نظر شما درباره این جملات چیست؟ با کدام موافقت می‌کنید؟

● **امیری:** بنده ابتدا تشکر می‌کنم که این فرصت را به وجود آوردید تا درباره شعر و ریاضیات صحبت کنیم. در جواب باید بگویم، این به تعریف شما از شعر و ریاضیات برمی‌گردد. در مورد تعریف شعر، خوب حرف‌های زیادی گفته‌اند. مثلاً **ولتر** می‌گوید: «شعر موسیقی روح حساس است» و به این ترتیب دامنه تعریف شعر بسیار گسترده می‌شود. اما اگر ریاضیات را به‌عنوان یک دانش در نظر بگیریم، تعریف خاص خودش را دارد.

در هر صورت، اگر جوهره شعر و ریاضیات را بنگریم، اشتراک و هموندی بسیار می‌بینیم. چون با وجود تفاوت ظاهری آن‌ها، در هر دو جوهر تفکر و تخیل وجود دارد. به‌نظر من این دو جمله که «ریاضی‌دان باید تا حدی شاعر باشد» و یا «شاعر باید تا اندازه‌ای ریاضی‌دان باشد»، تفاوت چندانی ندارند. اگر بخواهیم به زبان ریاضی بیان کنیم، مثل دو مجموعه  $A$  و  $B$  که اشتراکی دارند، این دو جمله هم اشتراک مفهوم دارند. بله ممکن است بعضی ریاضی‌دان‌ها شاعر نباشند و یا بعضی شاعران با ریاضی قرابتی نداشته باشند، ولی ایده‌آل جایی است که این دو اشتراک پیدا می‌کنند و اوج ریاضی‌دان بودن و اوج شاعر بودن همین اشتراک است. به‌علاوه، نه‌تنها ریاضیات که همه علوم، مثل فلسفه، علوم اجتماعی و... ریشه در معرفت دارند که شاعری هم با آن سروکار دارد.

**شرقی:** زنده‌یاد دکتر **شرف‌الدین** که اخیراً از

دنیا رفتند و از همکاران مجله ما و استاد دانشگاه هرمزگان بودند، کتابی دارند به نام «ریاضی دلایز در ادب گهرریز». ایشان در این کتاب، حتی ریاضیات را به عنوان پیش نیاز شاعری معرفی می کند و برای مثال، با استفاده از الگوهای ریاضی و منطقی، نشان می دهد که شعر معروف سعدی، شاعر بزرگ شیراز، که به صورت:

بنی آدم اعضای یکدیگرند

که در آفرینش ز یک گوهرند

معروف شده است، باید به این صورت بوده باشد:

«بنی آدم اعضای یکدیگرند

که در آفرینش ز یک گوهرند»

یعنی از ریاضیات برای تکمیل شعر استفاده می کند و عقیده دارد، ریاضیات ابزار مناسبی برای شاعر است تا هندسه شعر خود را تکمیل کند. اگر نظری در این مورد دارید بفرمایید.

● **امیری:** نکته بسیار دقیق و جالبی را بیان کردید. این موضوع به خصلتی که ریاضیات دارد، برمی گردد و آن «خصلت زبانی» است. یعنی ریاضیات که از یک زاویه، علم محسوب می شود، از زاویه ای دیگر، زبان است؛ زبانی صمیمی. این صمیمیت به ماهیت ریاضیات برمی گردد که یکی از بی آلیش ترین دستاوردهای ذهن بشر است و همه انسان ها به نوعی این موضوع را تجربه کرده اند. ریاضیات عین صداقت است و هیچ دروغ و خلاف منطقی را نمی توانید در آن ببینید. هر چه که خلاف منطق باشد، فوراً خودش را در این محیط نشان می دهد. این زبان منطقی و صمیمی می تواند در خدمت همه علوم و از جمله شاعری قرار بگیرد. شعر را غنا ببخشد و به منطقی کردن «وجه شبه» که اساس هندسه شعر است، کمک کند.

📌 **شرقی:** خیلی از ریاضی دانان، از گذشته تا امروز با شعر و شاعری ارتباط داشته اند. مثلاً از گذشتگان، پروفیسور هشتروندی دیوان شعر «سایه ها» را داشت یا حسین غیور شعر می گفت. از اعضای هیئت تحریریه مجله خود ما هم آقای یاسی پور اهل شعر است و شعرهای زیادی سروده. آقای دکتر ایردموسی هم مجموعه شعر دارد. آیا به نظر شما این موضوع تصادفی است؟

● **امیری:** خیر، به نظر من اصلاً تصادفی نیست و حتماً ارتباطی است بین ریاضی دان بودن و شاعر بودن. زمانی ما این ارتباط را بهتر می فهمیم که لازمه



ریاضیات که  
از یک زاویه،  
علم محسوب  
می شود،  
از زاویه ای دیگر،  
زبان است؛  
زبانی صمیمی.  
این صمیمیت  
به ماهیت ریاضیات  
برمی گردد  
که یکی از  
بی آلیش ترین  
دستاوردهای  
ذهن بشر  
است

شاعری را بدانیم. لازمه شاعری تعهد است و اینکه شاعر متعهد به فهم و شناخت مسائل اطراف خود باشد. اما ریاضی دان این کار را ضمن تحقیق و تتبع در مسائل مختلف بارها و بارها تمرین می کند.

نکته دیگر در شاعری احساس است. ریاضیات با وجود آنکه به ظاهر به نظر می رسد با احساس ارتباطی نداشته باشد، ولی به واقع چنین نیست. خیلی وقت ها در حل مسائل ریاضی درگیری احساسی به وجود می آید.

📌 **شرقی:** آیا منطق جدی ریاضیات با لطافت شعر تناقض ندارد؟

● **امیری:** به نظر من تناقض وجود ندارد و اتفاقاً کاملاً هم سو هستند. شاعرانه ترین مفاهیم را می توان در میان متون ریاضی پیدا کرد. بنده قبل از آنکه به شاعری بپردازم، شاعرانه ترین جملات را در میان متون ریاضی دیدم: «این دنباله چیست که به این عدد می گراید!» من لطیف ترین احساس ها را در برخورد با این متون تجربه کرده ام.



در ریاضیات، دقت حرف اول را می‌زند و تمثیل، ایهام و کنایه هیچ مزیتی را به ما نمی‌بخشد. ولی ریاضیات می‌تواند کمک کند که تمثیل شاعر و مقایسه‌ای که می‌کند، قالبی منطقی بگیرد

● امیری: بله.

■ شرقی: کدام دبیرستان بودید؟  
● امیری: دبیرستان توحید شیراز که یکی از بهترین دبیرستان‌های شیراز بود. ما اتفاقاً در همان دوران به مجلهٔ برهان هم توجه خاصی داشتیم و مقالات خود شما و



زنده‌یاد پرویز شهبازی و دوستان دیگر را دنبال می‌کردیم.

■ شرقی: شعر را به‌طور جدی از کی شروع کردید؟

● امیری: من در دانشگاه تربیت معلم که بودم، شاعری را به‌طور جدی آغاز کردم. البته قبل از آن روح شاعرانه داشتیم، اما در دورهٔ دانشجویی به‌طور رسمی اشعارم را جمع‌آوری کردم. بعد هم که در دانشگاه شیراز ادامهٔ تحصیل دادم (در رشتهٔ ریاضی)، به شاعری ادامه دادم.

■ شرقی: طبع لطیفتان را از کجا آوردید؟!

● امیری: خب پدرم دبیر ادبیات بودند و این بی‌تأثیر نبود. اما به‌هر حال خودم روحیه‌ای خاص داشتیم، به طبیعت علاقه‌مند بودم و ...

■ راستی‌زاده: آیا شخص خاصی وجود داشته است روی شما تأثیر خاصی گذاشته و مسیر شما را تحت تأثیر خودش قرا داده باشد؟

● امیری: البته افراد زیادی در برهه‌های متفاوت و مراحل سنی گوناگون روی من تأثیر گذار بوده‌اند. اما اگر بخواهم اسم ببرم، باید از دبیر ادبیاتمان در دبیرستان، آقای کاظم شیعتی نام ببرم که از دبیران خوش‌نام ادبیات استان فارس بودند. ایشان خود شاعر بودند و تأثیر مثبتی در گرایش من به شاعری داشتند. دیگر باید از خود متون ریاضی یاد کنم که به‌منظر من بسیار با احساس هستند.

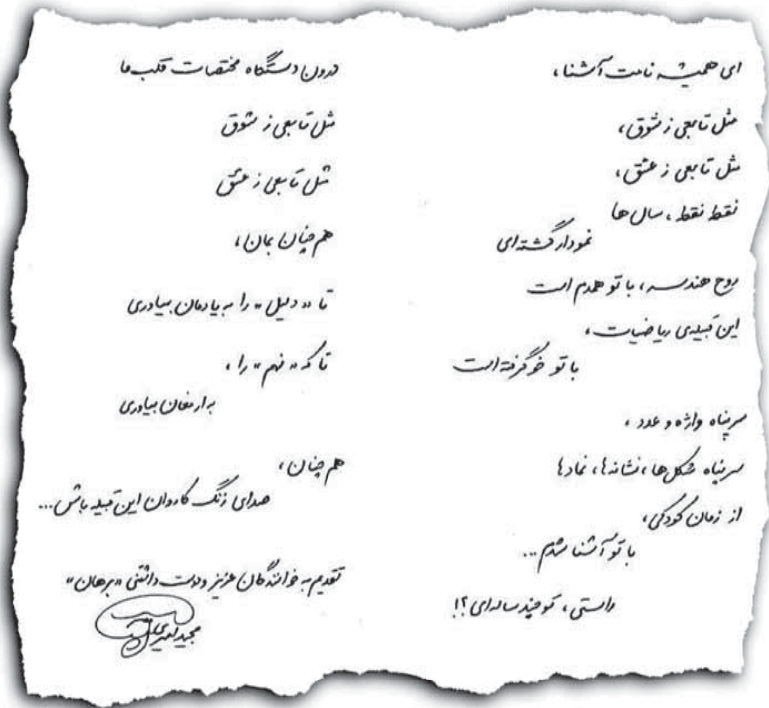
■ شرقی: زبان شعر، زبان تمثیل است و ما ایرانیان در تمثیل و ضرب‌المثل آوردن شهره‌ایم! سخنورانمان در هر جمله‌ای که می‌گویند، پی‌درپی از شعر برای اثبات کلامشان استفاده می‌کنند. حتی پدربزرگ‌ها برای نصیحت نوه‌هایشان از شعر کمک می‌گیرند. اما زبان ریاضیات منطقی محض است و در استدلال، تمثیل به‌هیچ‌عنوان جایز نیست و چیزی را ثابت نمی‌کند. آیا این موضوع ما را دچار تناقض نمی‌کند؟

● امیری: البته در ریاضیات دقت حرف اول را می‌زند و تمثیل، ایهام و کنایه هیچ مزیتی را به ما نمی‌بخشد. ولی ریاضیات می‌تواند کمک کند که تمثیل شاعر و مقایسه‌ای که می‌کند، قالبی منطقی بگیرد. البته ریاضیات و شاعری کاملاً با هم انطباق ندارند و تفاوت‌های ماهوی هم دارند. در ریاضیات از تمثیل فقط برای فهم و درک بهتر مسئله می‌توان استفاده کرد و نمی‌توان برای استدلال دقیق از آن بهره گرفت.

■ شرقی: شما اول شاعر بودید بعد به ریاضیات پیوستید، یا برعکس، اول اهل ریاضیات بودید و بعد به شعر و شاعری روی آوردید؟

● امیری: شاید این هم‌زمان اتفاق افتاد. من ریاضی‌دان که نیستم، ولی به ریاضیات علاقه داشتم. اما به‌هر حال در جست‌وجوی معرفت بودم و در مسیر معرفت پرسش‌هایی پیش می‌آید و این پرسش‌ها ساختار ذهنی انسان را منظم می‌کند. از طرف دیگر، نوعی هم ساختارگریزی به‌وجود می‌آورد که برای گریز از این وضع به شعر و ادبیات پناه می‌برد.

■ شرقی: پس از همان دوران دبیرستان به ریاضیات علاقه‌مند بودید و به شعر هم گریز می‌زدید؟!



**راستی زاده:** شما به عنوان یک شخص علاقه‌مند به ریاضی، حتماً مثل من و خیلی‌ها این را تجربه کرده‌اید که وقتی انسان یک مسئله ریاضی را حل می‌کند، و بعد از مدت‌ها کلنجار رفتن، کلید آن را می‌یابد، لذت خاصی را تجربه می‌کند. اما شاعری هم لذت خاصی دارد. وقتی موضوعی در ذهنتان جرقه می‌زند و می‌خواهید آن را به شعر درآورید، مدت‌ها فکر می‌کنید و شاید آن جمله و آهنگ و نظم را نیابید، اما یکبار به آن می‌رسید. خب این هم لذت خاصی دارد. شما می‌توانید این دو لذت را با هم مقایسه کنید؛ با توجه به اینکه هر دو را تجربه کرده‌اید!

**امیری:** این دو موقعیت را می‌توانید به عنوان یک مسئله تلقی کنید. در واقع یک چیز هستند و هر دو یک آشفتگی درونی را سامان می‌دهند. وقتی ریاضی‌دان با یک مسئله مواجه است یا یک شاعر با یک شعر نسوده روبه‌رو می‌شود، و بعد مسئله حل و یا شعر سروده می‌شود، در واقع به یک سرانجام ختم می‌شوند و آن لذت ناشی از حل مسئله است.

**شرقی:** آن طور که از نوشته‌هایتان برمی‌آید، باید اهل مطالعه هم باشید. همین طور است؟

**امیری:** بله من سعی می‌کنم هر روز حداقل ۲-۳ ساعت مطالعه داشته باشم.

**شرقی:** بیشتر چه چیزهایی می‌خوانید؟

**امیری:** الان بیشتر مطالب مرتبط با جامعه‌شناسی را می‌خوانم، ولی به رمان و داستان هم خیلی علاقه دارم.

**شرقی:** چه کتابی را می‌توانید همین الان برای مطالعه به دانش‌آموزان توصیه کنید؟

**امیری:** مثلاً کتاب «آرزوهای بزرگ» اثر ماندگار چارلز دیکنز و کتاب «کیمیاگر» اثر پائولو کوئیلو و کتاب «شازده کوچولو» که آن هم اثر بسیار زیبایی است و خواندن آن را به همه نوجوانان توصیه می‌کنم.

**شرقی:** میانه‌تان با طنز چطور است؟

**امیری:** اگر طنز جدی و آمیخته با تعهد باشد، از آن استفاده می‌کنم.

**شرقی:** با فیلم و سینما چطور؟

**امیری:** کمتر و ترجیح می‌دهم بیشتر وقتم را به مطالعه داستان بگذرانم. با این حال هفته‌ای، ماهی یک‌بار یک فیلم می‌بینم.

**شرقی:** می‌توانید به یکی از آن‌ها اشاره کنید؟

**امیری:** بله مثلاً فیلم «ذهن زیبا» برایم خیلی جالب

بود. سرگذشت ریاضی‌دانی است که به مدد ریاضیات و تفکر منطقی مشکل خود را می‌شناسد و بر آن غلبه می‌کند. شخصیت **جان نش** و بازیگر نقش او، **راسل کرو**، برایم خیلی جالب بود.

**شرقی:** کدام شعرتان را از میان آن‌ها که سروده‌اید، بیشتر دوست دارید؟ آن را به عنوان حسن ختام بخوانید.

**امیری:** آخرین شعر همین مجموعه، با عنوان

«زیر گنبد کبود»:

یکی بود یکی نبود،

زیر گنبد کبود

پای به «خط عمود»

هزار هزار تا نقطه بود

یکیشون قصه می‌گفت

واسه نقطه‌ها و خط‌های دیگه

حرف می‌زد انگاری اون

از یه دنیای دیگه!

قصه «ماه پیشونی»، «شاه پریون» نه!

قصه خوابی که اون شب دیده بود

توی اون خواب خودشو، ...

«زوج مرتب» دیده بود!

...

**شرقی:** سپاس فراوان از وقتی که به ما و خوانندگان

مجله دادید.

**امیری:** من هم از شما سپاس گزارم.

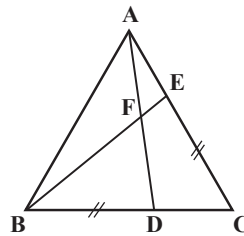
# پنج روش با تبدیل‌های هندسی برای حل یک مسئله!



مهرداد محدث  
دبیر ریاضی شهر تهران

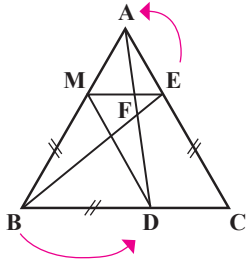
یکی از مسائل معروف که به کمک ویژگی‌های دوران حل می‌شود، آخرین تمرین کتاب درسی هندسه (۲) در فصل سوم کتاب است که بارها سؤال امتحان نهایی نیز بوده است. مسئله به این شکل طرح می‌شود:

مثلث  $ABC$  متساوی‌الاضلاع است و  $BD=CE$ . ثابت کنید:  $AD=BE$  و  $\widehat{BFD} = 60^\circ$  (CE را مساوی BD جدا کرده‌ایم).



در اینجا پنج روش متفاوت برای حل این مسئله ارائه می‌شود که همگی از دوران و ویژگی‌های آن به نوعی استفاده می‌کنند. این مسئله گویای اصل بسیار مهم تعدد روش‌های حل، برای یک مسئله ثابت با بینش‌های مختلف است (که چهار روش اول را در تصحیح اوراق امتحانات نهایی منطقه ۶ دیده‌ام). روش آخر روش شخصی خودم محسوب می‌شود که در کلاس‌های درسی برای فهم بیشتر دانش‌آموزان از آن استفاده می‌کنم و به نظر بنده بسیار قابل فهم‌تر و ملموس‌تر است.

## روش اول



BM را هم‌طول با BD روی BA و از طرف B جدا می‌کنیم. اگر به مرکز M و به اندازه  $\alpha = 60^\circ$  به کمک دوران E را به A و B را به D تصویر کنیم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} E \rightarrow A \\ B \rightarrow D \\ M \rightarrow M \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{چون دوران} \\ \text{ایزومتري است} \end{array} \rightarrow \triangle AMD \cong \triangle EMB$$

$$\rightarrow AD = BE$$

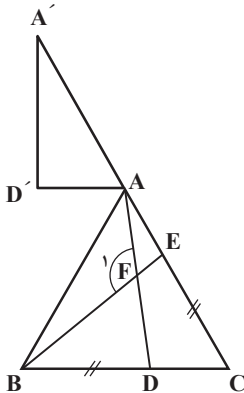
پاره‌خط تصویر پاره‌خط

زاویه بین خط و دوران یافته آن، یعنی  $\widehat{BFD}$  نیز مساوی  $60^\circ$  درجه خواهد بود.

تذکر:  $\triangle AME$  و  $\triangle BMD$  نیز با توجه به رسم بیان شده متساوی‌الاضلاع خواهند بود و شرایط حل برقرار است.

## روش دوم

مثلث DAC را به کمک بردار  $\overrightarrow{CA}$  انتقال می‌دهیم تا مثلث  $D'A'A$  به دست آید. سپس به مرکز A و  $120^\circ$  این مثلث را دوران می‌دهیم:



$$\left. \begin{array}{l} D' \rightarrow E \\ A' \rightarrow B \\ A \rightarrow A \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ایزومتري} \\ \text{بودن دوران} \end{array} \rightarrow \triangle AEB \cong \triangle AD'A' \left. \vphantom{\begin{array}{l} D' \rightarrow E \\ A' \rightarrow B \\ A \rightarrow A \end{array}} \right\} \triangle AEB \cong \triangle ADC$$

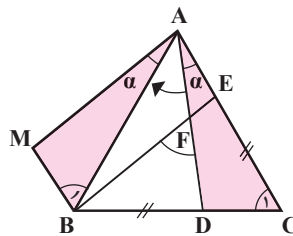
$$\rightarrow \triangle ADC \cong \triangle AD'A' \quad \text{ایزومتري بودن انتقال}$$

$$\text{اضلاع نظير} \rightarrow AD = BE$$

$$\widehat{F}_1 = 120^\circ \text{ و از آنجا } \widehat{BFD} = 60^\circ \text{ خواهد بود.}$$

### روش سوم

اگر مرکز دوران A و  $\alpha = 60^\circ$  را در جهت فلش در نظر بگیریم، آن گاه داریم:



$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow A \\ D \rightarrow M \\ C \rightarrow B \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ایزومتري} \\ \Delta ADC \cong \Delta AMB \quad (1) \\ \text{بودن دوران} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{با توجه به فرض سؤال} \\ AE = DC \\ DC = BM \end{array} \right\} AE = BM$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B}_1 = 60^\circ \\ \text{MAEB: قطر AB} \end{array} \right\} \rightarrow AE \parallel BM$$

$$\text{متوازی الاضلاع MAEB} \rightarrow \left. \begin{array}{l} AM = BE \\ AM = AD \end{array} \right\} AD = BE$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta AMB \text{ در } \hat{M} = 180 - (60 + \alpha) \\ \text{در متوازی الاضلاع } \hat{M} = \hat{E} \end{array} \right\} \hat{E} = 180 - (60 + \alpha) = 120 - \alpha$$

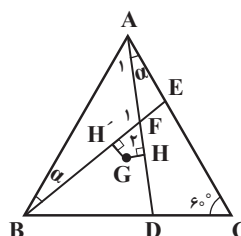
$$\Delta AFE \quad \hat{F} = 180 - (\hat{A} + \hat{E}) = 180 - (\alpha + (180 - (60 + \alpha)))$$

$$\rightarrow \hat{F} = 60^\circ \rightarrow \hat{BFD} = 60^\circ$$

متقابل به رأس

### روش چهارم

از محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (نقطه G) می‌گیریم و بر AD و BE عمودهایی مطابق شکل رسم می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} \text{در } \Delta ABE: \hat{F}_1 = 180 - (\hat{A}_1 + \hat{\alpha}) \\ \text{در رأس A: } \hat{A}_1 + \hat{\alpha} = 60^\circ \\ \rightarrow \hat{F}_1 = 180 - 60 = 120 \rightarrow \hat{F}_1 = 60^\circ \end{array} \right\} \leftarrow \Delta BAE \cong \Delta ADC \text{ (ضض)}$$

در چهارضلعی H'FHG داریم:  $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ . پس:

$$\hat{F}_1 + \hat{G} = 180^\circ \text{ در نتیجه: } \hat{G} = 120^\circ$$

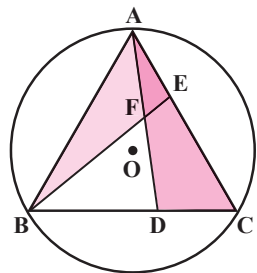
اگر به مرکز G و  $\hat{\alpha}$  برابر  $120^\circ$ ، H را دوران دهیم و بر H' تصویر کنیم، داریم:

$$\text{دوران پاره خطها: } AD \rightarrow BE$$

$$\text{ایزومتري بودن: } AD = BE$$

### روش پنجم (روش شخصی نگارنده)

با رسم دایره محیطی  $\Delta ABC$  (روش‌های بیان شده در فصل اول) را مرکز دوران در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه:  $\widehat{AC} = \widehat{AB} = \widehat{BC}$ ، هر یک از این کمان‌ها  $120^\circ = \frac{360^\circ}{3}$  خواهند بود. پس  $\hat{\alpha} = 120^\circ$  به عنوان زاویه دوران نتیجه می‌دهد:



$$\left. \begin{array}{l} C \rightarrow A \\ A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ D \rightarrow E \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ایزومتري} \\ \text{بودن دوران} \end{array} \rightarrow AD = BE$$

و  $AD \rightarrow BE$  در نتیجه AD و BE با هم زاویه‌ای مساوی زاویه دوران می‌سازند که مساوی  $120^\circ$  است در نتیجه زاویه حاده بین آنها مساوی  $60^\circ$  است:  $\hat{BFD} = 60^\circ$

پرسش‌های بیکار جو!

در مثلث ABC، زاویه رأس A منفرجه است، میانه BD با ضلع AB زاویه  $30^\circ$  می‌سازد و:  $\hat{C} = 30^\circ$  زاویه A چند درجه است؟

(الف)  ۱۰۰

(ب)  ۱۰۵

(ج)  ۱۱۰

(د)  ۱۱۵

(ه)  ۱۲۰

# آموزش ترجمه متون ریاضی

## ترجمه برای دانش آموزان

The division process ends when the expression in the bottom row is of lesser degree than the divisor. The expression in the bottom row is the **remainder**, and the polynomial in the top row is the **quotient**. Thus  $(6x^3 - 16x^2 + 23x - 5) \div (3x - 2) = 2x^2 - 4x + 5$  with a remainder of 5.

Although there is nothing wrong with writing the answer as we did above, it is more common to write the answer as the quotient plus the remainder divided by the divisor. (See the note at the left.) Using this method, we write

$$\frac{\overbrace{6x^3 - 16x^2 + 23x - 5}^{\text{Dividend}}}{\underbrace{3x - 2}_{\text{Divisor}}} = \overbrace{2x^2 - 4x + 5}^{\text{Quotient}} + \frac{5}{3x - 2} \text{ Remainder}$$

In every division, the dividend is equal to the product of the divisor and quotient, plus the remainder. That is,

$$\underbrace{6x^3 - 16x^2 + 23x - 5}_{\text{Dividend}} = \underbrace{(3x - 2)}_{\text{Divisor}} \cdot \underbrace{(2x^2 - 4x + 5)}_{\text{Quotient}} + \underbrace{5}_{\text{Remainder}}$$

The preceding polynomial division concepts are summarized by the following theorem.

### Note

$\frac{20}{3}$  written as a mixed number is  $6\frac{2}{3}$ .

Recall, however, that  $6\frac{2}{3}$  means  $6 + \frac{2}{3}$ ,

which is in the form  $\text{quotient} + \frac{\text{remainder}}{\text{divisor}}$ .

## الگوریتم تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

فرض کنید  $P(x)$  و  $D(x)$  چندجمله‌ای‌هایی باشند که  $D(x)$  از درجه کمتر از  $P(x)$  باشد و  $D(x)$  از درجه ۱ یا بیشتر باشد. در این صورت چندجمله‌ای‌هایی منحصر به فرد مانند  $Q(x)$  و  $R(x)$  وجود دارند، به طوری که:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

در این رابطه  $R(x)$  یا صفر است و یا از درجه کمتر از درجه  $D(x)$  است. چندجمله‌ای  $P(x)$  **مقسوم**،  $D(x)$  **مقسوم‌علیه**،  $Q(x)$  **خارج‌قسمت** و  $R(x)$  باقی‌مانده، نامیده شده است.

قبل از تقسیم چندجمله‌ای‌ها، مطمئن می‌شویم که هر چند جمله‌ای به صورت نزولی مرتب نوشته شده باشد. در بعضی حالت‌ها، قرار دادن صفر (ضریب صفر) برای جملاتی که در مقسوم وجود ندارند، مفید است؛ به طوری که جملات مشابه در یک ستون و زیر هم قرار بگیرند. در مثال ۱ این مطلب نشان داده شده است.

**سؤال:** اولین کاری که باید برای پیدا کردن خارج‌قسمت تقسیم زیر انجام دهید، چیست؟

$$(2x+1+x^2) \div (x-1)$$

### مثال ۱. تقسیم چندجمله‌ای‌ها

$$\begin{array}{r} -5x^2 - 8x + x^2 + 3 \\ \hline (x - 3) \end{array}$$

تقسیم کنید:

**حل:** صورت کسر را به صورت نزولی، مرتب می‌نویسیم. سپس تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{-5x^2 - 8x + x^2 + 3}{x - 3} = \frac{x^2 - 5x^2 - 8x + 3}{x - 3}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 0x^2 - 5x^2 - 8x + 3 \quad | \quad x - 3 \\ \hline x^2 - 3x^2 \quad \quad \quad x^2 + 3x^2 + 4x + 4 \end{array}$$

$$3x^2 - 5x^2$$

$$3x^2 - 9x^2$$

$$4x^2 - 8x$$

$$4x^2 - 12x$$

$$4x + 3$$

$$4x - 12$$

$$15$$

قرار دادن  $x^2$  به جای جمله جافتاده کمک می‌کند تا جملات را به صورت

ستونی زیر هم مرتب بنویسیم.

$$\frac{-5x^2 - 8x + x^2 + 3}{x - 3} = x^2 + 3x^2 + 4x + 4 + \frac{15}{x - 3}$$

بنابراین:



### لغت‌ها و اصطلاحات مهم

- |                     |           |                        |                        |
|---------------------|-----------|------------------------|------------------------|
| 1. Let .....        | فرض کنید  | 2. Polynomial .....    | چندجمله‌ای             |
| 3. Degree .....     | درجه      | 4. Unique .....        | یکتا، منحصر به فرد     |
| 5. Dividend .....   | مقسوم     | 6. Divisor .....       | مقسوم‌علیه             |
| 7. Quotient .....   | خارج‌قسمت | 8. Remainder .....     | باقی‌مانده             |
| 9. Descending ..... | نزولی     | 10. Missing term ..... | جمله جاافتاده          |
| 11. Numerator ..... | صورت کسر  | 12. Inserting .....    | قرار دادن، جاسازی کردن |



### Division Algorithm for Polynomials

Let  $P(x)$  and  $D(x)$  be polynomials, with  $D(x)$  of lower degree than  $P(x)$  and  $D(x)$  of degree 1 or more. Then there exist unique polynomials  $Q(x)$  and  $R(x)$  such that

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

where  $R(x)$  is either 0 or of degree less than the degree of  $D(x)$ . The polynomial  $P(x)$  is called the **dividend**,  $D(x)$  is the **divisor**,  $Q(x)$  is the **quotient**, and  $R(x)$  is the **remainder**.

Before dividing polynomials, make sure that each polynomial is written in descending order. In some cases, it is helpful to insert a 0 in the dividend for a missing term (one whose coefficient is 0) so that like terms align in the same column. This is demonstrated in Example 1.

**Question:** What is the first step you should perform to find the quotient of  $(2x + 1 + x^2) \div (x - 1)$ ?

#### EXAMPLE 1 Divide Polynomials

Divide: 
$$\frac{-5x^2 - 8x + x^4 + 3}{x - 3}$$

#### Solution

Write the numerator in descending order. Then divide.

$$\frac{-5x^2 - 8x + x^4 + 3}{x - 3} = \frac{x^4 - 5x^2 - 8x + 3}{x - 3}$$

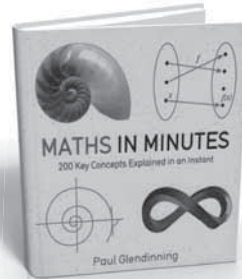
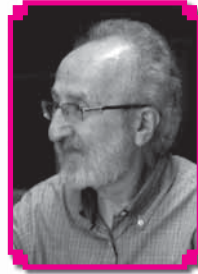
$$\begin{array}{r} x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 8x + 3 \quad | \quad x - 3 \\ \underline{x^4 - 3x^3} \phantom{+ 0x^2} \phantom{- 8x} \phantom{+ 3} \\ 3x^3 - 5x^2 \phantom{- 8x} \phantom{+ 3} \\ \underline{3x^3 - 9x^2} \phantom{- 8x} \phantom{+ 3} \\ 4x^2 - 8x \phantom{+ 3} \\ \underline{4x^2 - 12x} \phantom{+ 3} \\ 4x + 3 \\ \underline{4x - 12} \\ 15 \end{array}$$

- Inserting  $0x^3$  for the missing term helps align like terms in the same column.

$$\text{Thus } \frac{-5x^2 - 8x + x^4 + 3}{x - 3} = x^3 + 3x^2 + 4x + 4 + \frac{15}{x - 3}$$

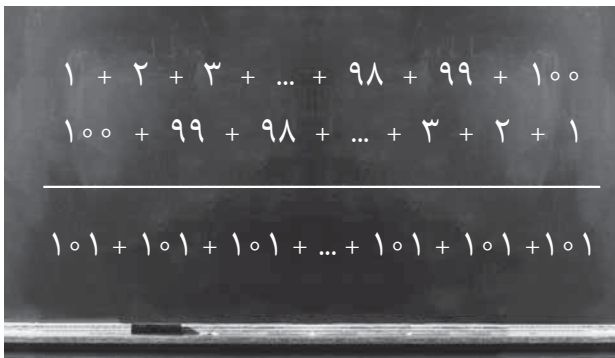


تألیف: پال گلندینینگ  
مترجم: غلامرضا یاسی پور



### تساعد حسابی

تساعد حسابی فهرستی مرتب از اعدادی است که تفاضل بین جمله‌های متوالی آن مقداری ثابت است. مثال آن ... ۵۲, ۳۹, ۲۶, ۱۳, ۰ است که در آن تفاضل مشترک ثابت عدد ۱۳ است. اگر این تفاضل مشترک مثبت باشد، دنباله‌ای مانند این مثال، به بی‌نهایت میل می‌کند، و اگر منفی باشد، دنباله به بی‌نهایت منفی نزدیک می‌شود. قضیه گرین - تائو (Green-Tao) که اخیراً به اثبات رسیده است، رواج تصاعدهای حسابی طولانی اعداد اول را توصیف می‌کند.



محاسبه مجموع‌های جزئی  
تساعد حسابی، با به‌کار بردن کلک کوچکی، نسبتاً ساده است. به‌عنوان نمونه، مجموع ۱ تا ۱۰۰ چقدر است؟ طریق ساده انجام این کار، دو بار فهرست کردن این مجموع با یک‌بار به طرف جلو و یک‌بار به سمت عقب رفتن است، به‌طوری که ستون‌هایی تشکیل دهیم که مجموعشان ۱۰۱ می‌شود. از آنجا که ۱۰۰ عدد از این مجموع‌ها داریم، کل مجموع می‌شود ۱۰۰ ضرب در ۱۰۱، تقسیم بر ۲. در حالت عمومی این استدلال نشان می‌دهد که مجموع هر تصاعد حسابی با فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$a + 2a + 3a + \dots + na = \frac{1}{2}an(n+1)$$

## تصادد هندسی

تصادد هندسی (geometric progression) فهرست مرتبی از اعدادی است که در آن هر جمله متوالی حاصل ضرب جمله پیشین و عددی ثابت است. مثال آن، ۱، ۴، ۱۶، ۶۴، ۲۵۶، ... است که در آن، عامل ضرب ثابت مزبور، یعنی عدد ۴،

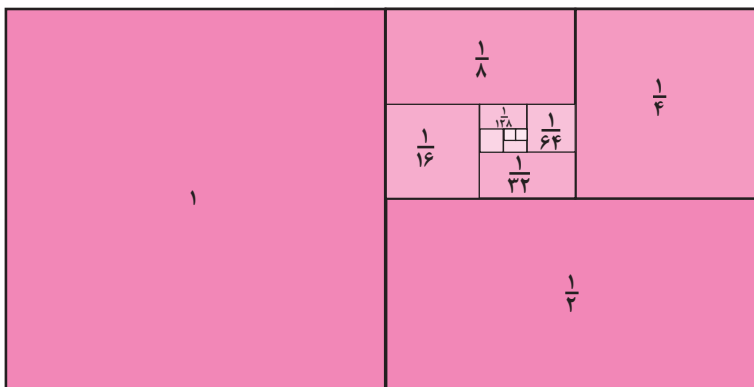
به عنوان نسبت مشترک  $r$  مشهور است. مجموع جزئی یک تصاعد هندسی عبارت است از:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n$$

اگر ضریب  $r$  بزرگتر از ۱ باشد، آن گاه این مجموع به سمت به علاوه یا منهای بی نهایت واگرا می شود. اما اگر ضریب  $r$  کوچکتر از ۱

باشد، در این صورت سری حدی، موسوم به «سری هندسی» (geometric sery)، به حد  $S = \frac{a}{(1-r)}$  میل می کند.

تصاددهای هندسی در بسیاری از مسائل ریاضی روی می دهند، و در بررسی ربح مرکب و قیمت در حسابداری نقش اساسی دارند. بسیاری از ریاضی دانان استدلال می کنند که «پارادوکس زنون» (Zeno's paradox) را حل کرده اند. زیرا مجموع های فاصله طی شده و زمان گرفته شده توسط خرگوش، تصاددهای هندسی هستند که به مجموع فاصله مسیر مسابقه می انجامند.



▶ در نمودار مقابل، سطوح مستطیل ها یک تصاعد هندسی را با نسبت مشترک ۱/۲ نمایش می دهد. نمودار به روشنی نشان می دهد که سری نامتناهی به مقدار ۲ همگرا می شود.

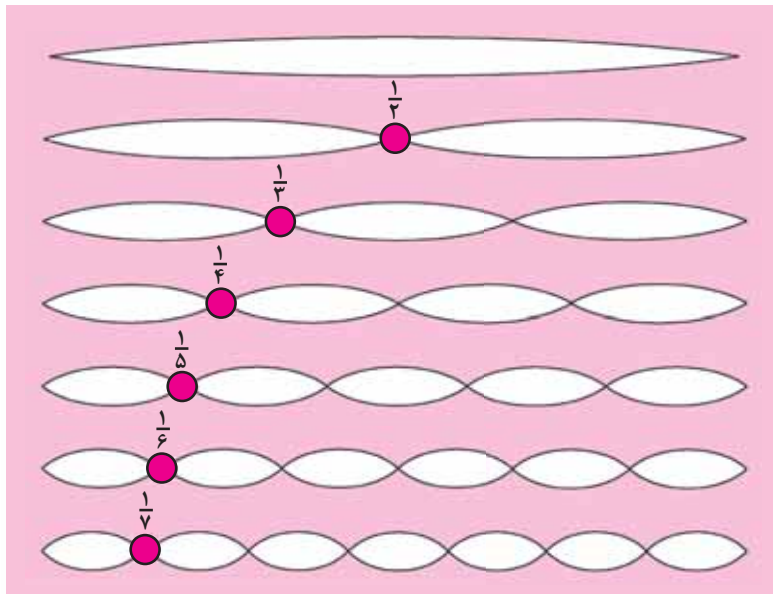
## سری همساز

«سری همساز» (harmonic sery) مجموع دنباله ای نامتناهی از کسره های به طور یکنواخت کاهش یابنده است. این سری که در نظریه موسیقی دارای اهمیت است، به این صورت تعریف می شود:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ، و جملات اولیه آن

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

عبارت اند از: یکی از جنبه های شگفت آمیز سری همساز این است که گرچه تفاضل های متوالی بین جملات آن به صفر تقلیل می یابد، بدون حد رشد می کند.

یک راه شناخت این رفتار واگرای مورد بحث، گردآوری پهلوی هم جمله های آن در گروه های کوچکتر است. این کار آشکار می کند که همواره ممکن است گروهی از جمله های متوالیاً



▶ سری همساز از این نظر در موسیقی دارای اهمیت است که مقام های ارتعاش گوناگون مربوط به یک سیم کشیده شده یا ضربه خورده ای، که از دو طرف ثابت شده است، را به دست می دهد.

کوچکتر تشکیل دهیم که با هم به عددی بزرگتر از یک دوم بینجامند. به عنوان نمونه  $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})$  بزرگتر از یک دوم است؛ همین طور که  $(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})$  چنین است.



## اشاره

استفاده از برنامه‌های رایانه‌ای می‌تواند دقت در رسم شکل‌های هندسی را افزایش دهد و ما این کار را در این مقاله با استفاده از برنامه‌ای به زبان ویژوال ++C انجام داده‌ایم.

برای استفاده از رایانه، ما مثلث را روی محورهای مختصات فرض کرده و با ارائه مختصات سه رأس به رایانه مسائل هندسی را در دستگاه دکارتی تحلیل کرده‌ایم. کار این برنامه رسم میانه‌ها، ارتفاع‌ها، نیم‌سازها، عمودمنصف‌ها، و محاسبه طول آن‌ها و مختصات نقاط هم‌رسی و فاصله نقاط هم‌رسی از سه رأس و... است. به این ترتیب برنامه‌نویسی و رایانه کار تحقیق در هندسه را شهودی‌تر می‌کند، زیرا همه فاصله‌ها و اندازه‌های مورد نیاز را در اختیار محقق قرار می‌دهد. در این مسیر از استدلال استقرایی برای فرضیه‌سازی استفاده شده و با استدلال استنتاجی آن‌ها را اثبات کرده‌ایم.

## مقدمه

ما می‌توانیم بسیاری از فرضیه‌ها و قضایای هندسی را از این برنامه استنتاج و سپس آن‌ها را اثبات کنیم؛ اگرچه درک یک قضیه بسیار مهم‌تر از اثبات آن است.

در ادامه چند تعریف از مفاهیم مورد بحث را ارائه داده‌ایم و در پی آن، سه فرضیه را که با استفاده از برنامه فوق حدس زده‌ایم، اثبات کرده‌ایم و آن‌ها را به‌عنوان قضیه مطرح ساخته‌ایم.

تعریف میانه: در مثلث به پاره‌خطی که رأس را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند، میانه گویند. هر مثلث سه میانه دارد.

تعریف ارتفاع: به پاره‌خطی که از رأس بر ضلع مقابل عمود می‌شوند، ارتفاع گویند. روشن است که هر مثلث سه ارتفاع دارد که ممکن است بعضی از آن‌ها خارج از مثلث رسم شوند.

تعریف عمودمنصف: به پاره‌خطی که از وسط هر ضلع بر آن ضلع عمود می‌شود، عمودمنصف گویند. هر مثلث سه عمودمنصف دارد.

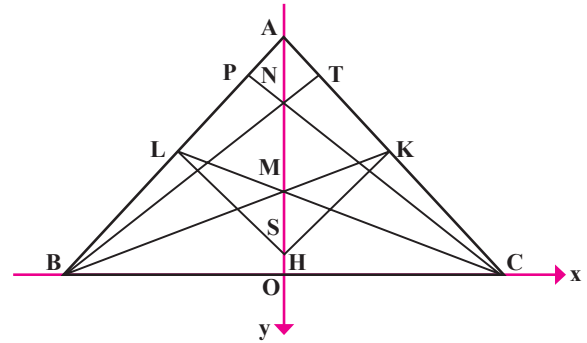
تعریف هم‌رسی: چندخط را هم‌رسی گویند، در صورتی که از یک نقطه بگذرند. به‌عبارت دیگر، که در یک نقطه همدیگر را قطع کنند. به آن نقطه نقطه هم‌رسی گویند.

**نکته:** در هندسه پایه دهم ثابت می‌کنیم، ارتفاع‌ها هم‌رس‌اند، میانها و عمودمنصف‌ها نیز هم‌رس‌اند.

**قضیه ۱:** در هر مثلث متساوی‌الساقین فاصله نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها تا نقطه هم‌رسی میانها دو برابر فاصله نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها از نقطه هم‌رسی میانهاست.

**اثبات:** بدون آنکه به کلیت مسئله ایرادی وارد شود، می‌توان مثلث متساوی‌الساقین را روی محورهای تصویر کرد به طوری که مطابق شکل ۱، قاعده آن روی محور  $x$ ‌ها باشد، دو ساق آن در دو نقطه  $B$  و  $C$  محور  $x$ ‌ها را قطع کنند و محور  $y$ ‌ها ارتفاع وارد بر  $BC$  باشد. (نقطه  $A$  روی محور  $y$ ‌ها و  $x_C = -x_B$  است.) اگر نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها،  $M$  نقطه هم‌رسی میانها و  $S$  نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها باشد، داریم:

$$K\left(\frac{x_C}{2}, \frac{y_A}{2}\right) \quad A(0, y_A) \quad B(x_B, 0) \quad C(x_C, 0)$$



شکل ۱

$$m_{AC} = -\frac{y_A}{x_C} \Rightarrow m_{SK} = \frac{x_C}{y_A}$$

$$SK: y - y_K = \left(\frac{x_C}{y_A}\right)(x - x_K)$$

$$AH: x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y - y_K = -\frac{(x_C y_K)}{y_A} \Rightarrow y = \frac{(y_A^2 - x_C)}{2y_A}$$

$$S\left(0, \frac{(y_A^2 - x_C)}{2y_A}\right)$$

$$m_{AC} = \frac{(-y_A)}{x_C} \Rightarrow m_{BT} = \frac{x_C}{y_A}$$

$$\Rightarrow BT: y - y_B = \left(\frac{x_C}{y_A}\right)(x - x_B)$$

$$\Rightarrow BT: y = \left(\frac{x_C}{x_A}\right)(x - x_B)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{(-x_B x_C)}{y_A} = \frac{x_C}{y_A} \Rightarrow N\left(0, \frac{x_C}{y_A}\right)$$

از طرفی مختصات نقطه  $M$ :

$$M\left(\frac{(x_A + x_B + x_C)}{3}, \frac{(y_A + y_B + y_C)}{3}\right) \Rightarrow M\left(0, \frac{y_A}{3}\right)$$

$$\frac{MN}{MS} = \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{x_C}{y_A}\right) - \frac{y_A}{3}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{(y_A - x_C)}{2y_A} - \frac{y_A}{3}\right)^2}} = |-2| = 2$$

**قضیه ۲:** در هر مثلث، سه نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها، میانها و عمودمنصف‌ها روی یک خط راست هستند.

**اثبات:** مثلث دلخواه  $ABC$  را مطابق شکل زیر طوری روی محورهای مختصات قرار می‌دهیم که ضلع  $AB$  روی محور  $x$ ‌ها و مبدأ مختصات وسط ضلع  $AB$  قرار داشته باشد؛ یعنی  $x_B = -x_A$ . این کار به کلیت مسئله ایرادی وارد نمی‌سازد. نقطه  $O$  وسط  $AB$  و محور  $y$  عمودمنصف ضلع  $AB$  است. فرض کنید نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها و  $SH$  و  $SK$  عمودمنصف‌های اضلاع  $BC$  و  $AC$  باشند. داریم:

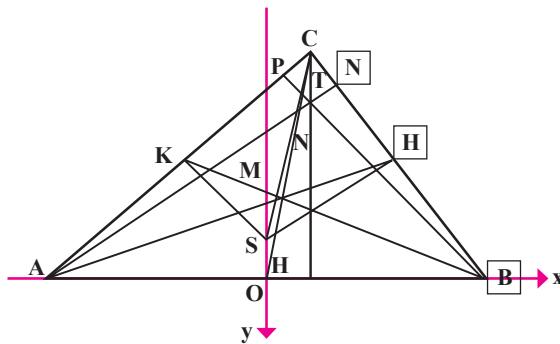
$$H\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_C}{2}\right), \quad K\left(\frac{(x_C - x_B)}{2}, \frac{y_C}{2}\right)$$

$$m_{BC} = \frac{(y_B - y_C)}{(x_B - x_C)} = \frac{-y_C}{(x_B - x_C)}$$

$$m_{SH} = \frac{(x_B - x_C)}{y_C} \quad \text{شیب SH}$$

معادله  $SH$ : (رابطه ۱)

$$\frac{y - y_C}{2} = \left[\frac{(x_B - x_C)}{y_C}\right] \times x - \frac{(x_B^2 - x_C^2)}{(2y_C)}$$



شکل ۲

معادله عمودمنصف وارد بر  $AB$  همان خط  $x = 0$  (رابطه ۲) است. از رابطه ۱ و ۲ مختصات نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها

به صورت زیر نتیجه می شود:

$$y_S - \left(\frac{y_C}{2}\right) = \frac{-(x_B - x_C)}{(2y_C)} \Rightarrow S \left( \frac{y_C - x_B + x_C}{2y_C} \right)$$

اگر M را نقطه همرسی میانه های AH، CO، BK در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$x_M = \frac{(2x_O + x_C)}{3} = \frac{x_C}{3}, \quad y_M = \frac{(2y_O + y_C)}{3} = \frac{y_C}{3}$$

بنابراین نقطه همرسی میانه ها  $M\left(\frac{x_C}{3}, \frac{y_C}{3}\right)$  است که البته این نتیجه را می توان با نوشتن معادلات BK، CO و حل دستگاه مربوطه به راحتی به دست آورد.

حال فرض کنید AN، BP، CR ارتفاع های وارد بر اضلاع AC، BC، و AB باشند و نقطه W نقطه همرسی این سه ارتفاع باشد. داریم:

$$m_{AC} = \frac{(y_C - y_A)}{(x_C - x_A)} = \frac{y_C}{(x_C + x_B)}, \quad m_{BP} = \frac{(-x_B - x_C)}{y_C}$$

$$y - 0 = \left[ \frac{(-x_B - x_C)}{y_C} \right] \times (x - x_B) \quad \text{(رابطه ۳)}$$

$$m_{BC} = \frac{(y_C - y_B)}{(x_C - x_B)} = \frac{y_C}{(x_C - x_B)} \Rightarrow m_{AN} = \frac{(x_B - x_C)}{y_C}$$

بنابراین، معادله AN عبارت است از:

$$y - 0 = \left[ \frac{(x_B - x_C)}{y_C} \right] \times (x + x_B) \quad \text{(رابطه ۴)}$$

که داریم:  $x_A = -x_B$

از رابطه های ۳ و ۴ نتیجه می گیریم:

$$\left[ -\frac{(x_B + x_C)}{y_C} \right] \times (x - x_B) = \left[ \frac{(x_B - x_C)}{y_C} \right] \times (x + x_B)$$

$$\Rightarrow (-x_B - x_C - x_B + x_C)x = x_B^2 - x_B x_C - x_B^2 - x_B x_C$$

$$\Rightarrow x = x_C \Rightarrow y = \left[ \frac{(x_B - x_C)}{y_C} \right] \times (x_C + x_B) = \frac{x_B^2 - x_C^2}{y_C}$$

$$\Rightarrow W(x_C, \frac{(x_B^2 - x_C^2)}{y_C})$$

که نقطه همرسی ارتفاع هاست. حال نشان می دهیم، سه نقطه S، M و W روی یک خط راست هستند. با توجه به مختصات آنها داریم:

$$m_{MW} = \frac{\left[ \frac{y_C}{3} - \frac{(x_B^2 - x_C^2)}{y_C} \right]}{\left( \frac{x_C}{3} - x_C \right)} = \frac{(y_C^2 - 3x_B^2 + 3x_C^2)}{(-2x_C y_C)}$$

(رابطه ۵)

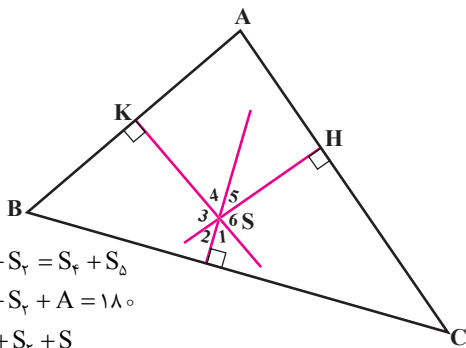
$$m_{MS} = \frac{\left[ \frac{y_C - x_B + x_C}{2y_C} - \frac{y_C}{3} \right]}{\frac{-x_C}{3}} = \frac{(y_C^2 - 3x_B^2 + 3x_C^2)}{(-2x_C y_C)}$$

رابطه (۶)

به عبارت دیگر، خط گذرنده بر M و W با خط گذرنده بر M و S دارای شیب برابرند. یعنی سه نقطه (M مشترک است) روی خط راست هستند.

**قضیه ۳:** در صورتی که نقطه همرسی عمودمنصف ها درون مثلث قرار گیرد، سه عمودمنصف یک مثلث در نقطه همرسی سه زاویه با هم می سازند که مجموع آنها  $180^\circ$  درجه است و با سه زاویه مثلث نظیر به نظیر برابرند.

**اثبات:** مثلث شکل ۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید: SK، SL و SH عمودمنصف هستند، نقطه S نقطه همرسی عمودمنصف هاست، و زاویه هایی که عمودمنصف ها با هم می سازند، مطابق شکل،  $S_1$  و  $S_2$  است. چهارضلعی AKSH دارای دو زاویه قائمه است، پس:



شکل ۳

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= S_4 + S_5 \\ S_1 + S_2 + A &= 180^\circ \\ S_1 + S_2 + S & \end{aligned}$$

از طرف دیگر، چهارضلعی KBLS دارای دو زاویه قائمه  $K_1$  و  $L_1$  است. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} B + S_1 + S_2 &= 180^\circ \\ S_1 + S_2 + S_3 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = S_3$$

به همین طریق ثابت می شود که:  $C = S_4$ .

### نتیجه

در این مقاله نشان دادیم، همان طور که ریاضیات نقش مهمی در به وجود آمدن رایانه و توسعه آن داشته است، رایانه و به خصوص برنامه نویسی نیز می تواند نقش فوق العاده ای در توسعه ریاضیات ایفا کند. ما این کار را برای درس های هندسه رشته ریاضی و فیزیک و همچنین دستگاه ها و ماتریس ها انجام دادیم و در هر سه مورد به نتایج جالبی رسیدیم که در این مقاله در مورد چند نکته از هندسه بحث کردیم.

### \*منابع

کتاب های هندسه دوره دبیرستان



خشایار کاویانپور  
دانشجوی کارشناسی ارشد آنالیز  
دانشگاه تربیت مدرس

# اثبات دقیق قضیه پیک با استفاده از زاویه

**قضیه:** ثابت کنید اگر یک چندضلعی شبکه‌ای دارای  $b$  نقطه مرزی و  $i$  نقطه درونی باشد، آن گاه مساحت آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A = \frac{b}{2} + i - 1$$

**اثبات:** ابتدا بنابر لم ۱، چندضلعی  $p$  را به  $N$  مثلث پایه افراز می‌کنیم (به شکل ۲ توجه کنید). اکنون مجموع زاویه‌های تمام مثلث‌ها را به دو روش محاسبه می‌کنیم:

**روش اول:** چون مجموع زوایای درونی هر مثلث برابر  $180^\circ$  و تعداد مثلث‌ها،  $N$  است، پس مجموع زوایای تمام مثلث‌ها  $N \times 180^\circ$  است.

**روش دوم:** از طرف دیگر، مجموع زاویه‌های هر رأس درونی مانند  $A$ ، برابر  $360^\circ$  است. در هر نقطه ضلعی، مانند  $B$ ، مجموع زاویه‌ها برابر  $180^\circ$  است و در رأس‌ها مجموع زوایای دیگر  $180^\circ$  نیست، اما اگر توجه کنیم که مجموع زوایای درونی یک  $k$  ضلعی، برابر  $(k-2) \times 180^\circ$  است و در ضمن، چون تعداد نقاط مرزی،  $b$  و تعداد رأس‌ها،  $k$  است، پس تعداد نقاط ضلعی، برابر  $b-k$  است و مجموع زاویه‌های نظیر این نقاط برابر است با:  $(b-k) \times 180^\circ$ . در نتیجه مجموع تمام زاویه‌ها برابر است با:

مجموع زاویه‌های مربوط به نقاط درونی = مجموع زاویه‌ها

مجموع زاویه‌های مربوط به رأس‌ها + مجموع زاویه‌های نقاط ضلعی +

$$= i \times 360^\circ + (b-k) \times 180^\circ + (k-2) \times 180^\circ \\ = (2i + b - 2) \times 180^\circ$$

از روش‌های اول و دوم داریم:

$$N \times 180^\circ = (2i + b - 2) \times 180^\circ \Rightarrow N = 2i + b - 2 \quad (**)$$

اما چون مساحت هر مثلث پایه،  $\frac{1}{2}$  و تعداد آن‌ها  $N$  است، پس

مساحت کل آن‌ها که همان مساحت چندضلعی است، می‌شود:

$$A = \frac{N}{2} \quad (***) \text{ و در نتیجه: } N = 2A$$

از روابط (\*\*\*) و (\*\*\*) داریم:

$$2A = 2i + b - 2 \Rightarrow A = i + \frac{b}{2} - 1$$

در ابتدای امر به چند تعریف و دو لم که بدیهی به نظر می‌رسند، نیازمندیم:

**نقطه رأسی:** نقطه‌ای را که روی رأس یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، نقطه رأسی می‌نامند.

**نقطه ضلعی:** نقطه‌ای را که روی ضلع یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، ولی این نقطه رأسی نباشد، نقطه ضلعی می‌نامند.

**نقطه مرزی در چندضلعی شبکه‌ای:** هر نقطه شبکه‌ای را که روی محیط چندضلعی واقع باشد، نقطه مرزی می‌نامند. رأس‌های چندضلعی شبکه‌ای، زیرمجموعه‌ای از نقاط مرزی هستند.

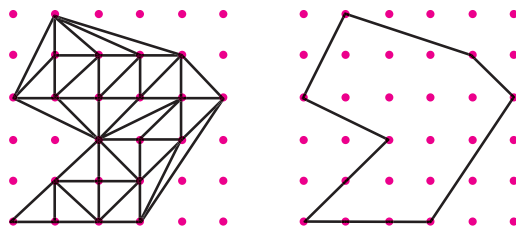
تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی را با  $b$  نمایش می‌دهند. (boundary points)

**نقطه درونی در چندضلعی شبکه‌ای:** هر نقطه شبکه‌ای را که داخل چندضلعی واقع باشد، نقطه درونی می‌نامند.

تعداد نقاط درونی یک چندضلعی را با  $i$  نمایش می‌دهند. (interior points)

**لم ۱.** هر چندضلعی شبکه‌ای قابل افراز به مثلث‌هایی پایه و جدا از هم است. (مثلث پایه، مثلثی است که فقط شامل سه نقطه مرزی است).

**لم ۲.** مساحت هر مثلث پایه برابر  $\frac{1}{2}$  است.



شکل ۱. یک چندضلعی شبکه‌ای

شکل ۲. یک چندضلعی شبکه‌ای

که به مثلث‌های پایه افراز شده است.



## هندسه دهم

۱. مثلث  $ABC$  و خط  $d$  در خارج آن مفروض اند. از  $A, B, C$  عمودهای  $AA', BB', CC'$  را بر  $d$  رسم می‌کنیم. اگر  $A'', B'', C''$  وسط‌های  $BB', CC', AA'$  باشند، ثابت کنید مساحت مثلث  $A''B''C''$  نصف مساحت مثلث  $ABC$  است.

۲. محیط یک دوزنقه متساوی‌الساقین ۲۸ سانتی‌متر و طول قاعده بزرگ آن دو برابر قاعده کوچک و طول ارتفاع آن  $\frac{1}{3}$  طول قاعده بزرگ است. مساحت این دوزنقه چند سانتی‌متر مربع است؟

۳. در مثلث  $ABC$ ، اگر  $AM$  میانه و  $O$  وسط  $AM$  باشد و امتداد  $OB$ ،  $AC$  را در  $D$  قطع کند، ثابت کنید:  $S_{AOD} = \frac{1}{12} S_{ABC}$ .

۴. مثلثی با رأس‌های  $(a, b)$ ،  $(a, 0)$  و  $(0, 0)$  مفروض است که در آن،  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی نسبت به هم اول (یعنی دو عددی که مقسوم‌علیه مشترکی جز

## ریاضی دهم

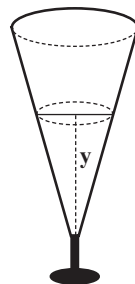
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ 2x & 0 < x \leq 2 \\ -x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

۱. نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x)$  را رسم و دامنه و برد آن را مشخص کنید. همچنین

مقدار  $g(g(g(-1)))$  را نیز به دست آورید.

۲. از روی نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^2$ ، نمودار تابع با ضابطه  $g(x) = x^2 - 4x$  را رسم کنید.

۳. ظرف آبی به شکل یک مخروط واژگون داریم که شعاع دهانه آن ۵ سانتی‌متر و عمق آن ۱۵ سانتی‌متر



است. درون این ظرف به آرامی آب می‌ریزیم تا آب آن به تدریج بالا بیاید. ارتفاع سطح آب ( $y$ ) را به صورت تابعی از حجم آن ( $x$ ) بنویسید. وقتی ۵۰ cc آب درون ظرف ریختیم، ارتفاع آب چند سانتی‌متر می‌شود؟



۱ ندارند) هستند. ثابت کنید تعداد نقاط شبکه‌ای درون مثلث برابر است با:  $\frac{1}{4}(a-1)(b-1)$ .

## حسابان (پایه سوم ریاضی)

۱. هر یک از حدهای زیر را پیدا کنید:

الف)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-6}}{x^2 - x - 20}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x - 2 \cos 2x}{1 - 2 \sin x}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x + [x]}{\sqrt{1 - \sin 2x}}$

۲. پیوستگی تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x[x]}{x - [-x]}$  را در نقطه  $a=2$  بررسی کنید.

۳.  $a$  و  $b$  را طوری به دست آورید که تابع  $f$  با ضابطه زیر در نقطه  $x_0=1$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x] + b & x > 1 \\ x + \sin \frac{\pi x}{2} & x = 1 \\ \frac{a \sin \pi x}{b(1-x)} & x < 1 \end{cases}$$

## جبر و احتمال (پایه سوم ریاضی)

۱. یک جفت تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را که ماکزیمم دو عدد بیش از ۴ باشد، به دست آورید.

۲. از بین مستطیل‌هایی که ابعاد آن‌ها کوچک‌تر از ۴ واحد است، یکی را به تصادف انتخاب کرده‌ایم، احتمال آن را که محیط آن بزرگ‌تر از ۶ باشد، به دست آورید.

۳. ۷۰ درصد تولیدات کارخانه‌ای سالم است. دو نمونه از تولیدات این کارخانه را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه حداقل یکی سالم باشد، چقدر است؟

## هندسه ۲ (پایه سوم ریاضی)

۱. ثابت کنید نگاشت  $f(x,y)=(x+1, 1-y)$  یک ایزومتری است. این نگاشت را توصیف کنید.

۲. بازتاب خط به معادله  $L: 2x+y=1$ ، نسبت به خط  $d$ ، خط  $L': x-2y=3$  است. معادله محور بازتاب را به دست آورید.

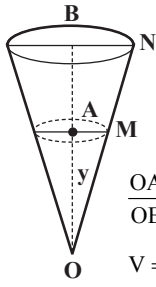
۳. معادله دوران یافته خط به معادله  $x+y=2$  حول مبدأ مختصات به اندازه  $27^\circ$  را به دست آورید.

۴. اگر مجانس سهمی به معادله  $y=x^2+b$  با مرکز تجانس مبدأ مختصات، سهمی  $y = \frac{1}{3}x^2 + 6$  باشد،  $b$  را به دست آورید.

### پرسش‌های بیکارجو!

چند جفت عددهای اول  $p$  و  $q$  یافت می‌شوند، به طوری که  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}$  مساوی وارون یک عدد طبیعی باشد؟

الف) یک  
 ب) دو  
 ج) سه  
 د) چهار  
 ه) صفر



۳. به کمک تشابه مثلث‌ها (قضیه تالس) می‌توان نوشت:

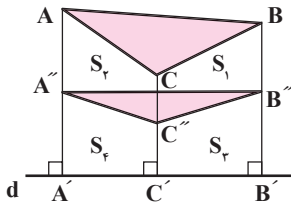
$$\frac{OA}{OB} = \frac{AM}{BN} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{AM}{5} \Rightarrow AM = \frac{y}{3} = r$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot y = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{y}{3}\right)^2 \cdot y = \frac{\pi y^3}{27} = x$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{27x}{\pi}} \quad x = 50 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{27 \times 50}{\pi}} \approx 7.5 \text{ cm}$$

### هندسه دهم

۱. دوزنقه‌های  $B''C''C'B'$  و  $CBB''C''$  هم مساحت هستند (چرا؟) و به همین ترتیب، دوزنقه‌های  $A''C''C'A'$  و  $ACC''A''$ ، و همچنین دوزنقه‌های  $A''B''B'A'$  و  $ABB''A''$  هم مساحت هستند. بنابراین داریم:



$$S_{ACBB''C''A''} = S_{A''C''B''B'A'}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 + S_{A''B''C''} = S_2 + S_6(1)$$

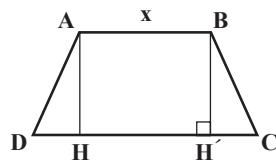
$$S_{ABB''A''} = S_{A''B''B'A'}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 + S_{ABC} = S_{A''B''C''} + S_2 + S_6(2)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$S_1 + S_2 + S_{ABC} = S_{A''B''C''} + S_1 + S_2 + S_{A''B''C''}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 2S_{A''B''C''}$$



۲.

$$CD = 2AB = 2x$$

$$DH = CH' = \frac{CD - AB}{2} = \frac{2x - x}{2} = \frac{x}{2}$$

پس با فرض  $AB = x$  داریم:

$$CD = 2x, AH = \frac{2x}{3}, DH = \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{\frac{4x^2}{9} + \frac{x^2}{9}}$$

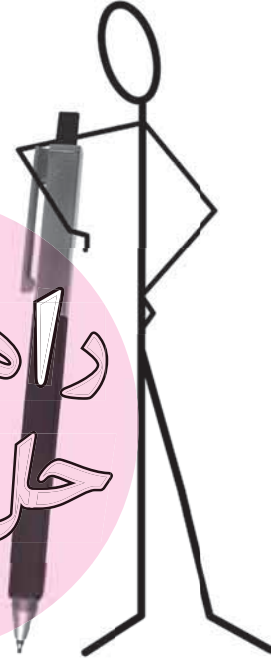
$$= \sqrt{\frac{5x^2}{9}} = \frac{\sqrt{5}x}{3} \Rightarrow P = AB + CD + 2AD$$

$$= x + 2x + \frac{2\sqrt{5}x}{3} = 28 \Rightarrow 14x = 28 \Rightarrow x = 2$$

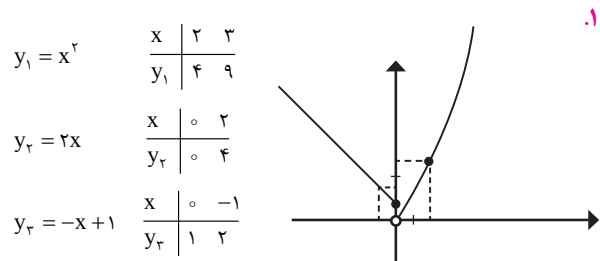
$$\Rightarrow AB = 2, CD = 4, AH = \frac{2}{3},$$

$$S = \frac{AB + CD}{2} \times AH = \frac{2 + 4}{2} \times \frac{2}{3} = 4 \text{ cm}^2$$

## راهنمای حل مسائل



### ریاضی دهم



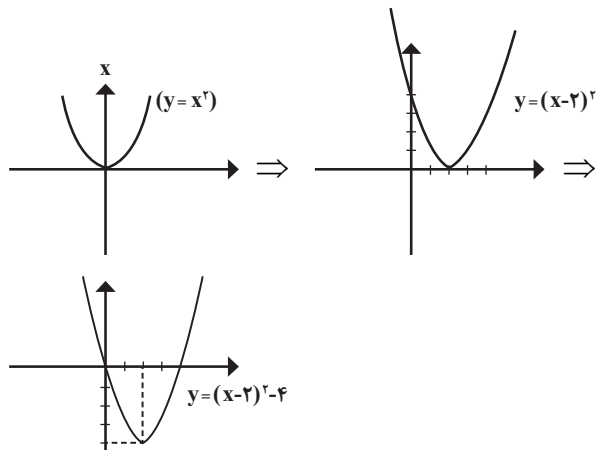
$$D_g = R, R_g = (0, +\infty) \quad g(-1) = -(-1) + 1 = 2$$

$$g(g(-1)) = g(2) = 2(2) = 4$$

$$g(g(g(-1))) = g(4) = 4^2 = 16$$

$$g(x) = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

۲.



## حسابان

الف) 
$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-6})(\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-6})}{(x-5)(x+4)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-6})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\overbrace{(x-1-2x+6)}^{-x+5}}{(x-5)(x+4)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-6})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{(x+4)(\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-6})} = \frac{-1}{36}$$

ب) 
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{3 \sin x - 4 \sin^2 x - 2(1 - 2 \sin^2 x)}{1 - 2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-4 \sin^2 x + 4 \sin^2 x + 3 \sin x - 2}{1 - 2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-4 \sin^2 x + 2 \sin^2 x + 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2}{1 - 2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x (1 - 2 \sin x) + (2 \sin x - 1)(\sin x + 2)}{1 - 2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(1 - 2 \sin x)(2 \sin^2 x - \sin x - 2)}{1 - 2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} 2 \sin^2 x - \sin x - 2 = -2$$

ج) 
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [x] = \left[ \frac{\pi}{4} \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sqrt{1 - \sin 2x}} = ?$$

$$x = \frac{\pi}{4} + t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \tan(\frac{\pi}{4} + t)}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\pi}{4} + 2t)}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan t}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan t}}{\sqrt{1 - \cos 2t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 + \tan t}{\sqrt{2} \sin t}$$

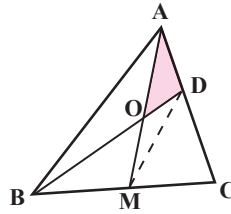
$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \tan t - 1 - \tan t}{\sqrt{2} |\sin t|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-2 \tan t}{\sqrt{2} (1 - \tan t) \sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-2(\frac{\tan t}{t})t}{\sqrt{2}(1 - \tan t)(\frac{\sin t}{t})t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-2}{\sqrt{2}(1 - \tan t)} = -\sqrt{2}$$

$$f(t) = \frac{2 \times 2}{2 - (-2)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2 \times 2}{2 - (-2)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{2 \times 1}{2 - (-2)} = \frac{1}{4}$$



$$S_{ABM} = S_{ACM}, S_{AOB} = S_{BOM}, S_{AOD} = S_{DOM}$$

۳. می‌دانیم در هر مثلث،  
میانۀ هر ضلع مساحت  
مثلث را به دو بخش  
معادل تقسیم می‌کند.  
بنابراین می‌توان نوشت:

حال می‌نویسیم:

$$S_{AMB} = S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

$$S_{AOB} = S_{OBM} = \frac{1}{2} S_{ABM} = \frac{1}{4} S_{ABC}$$

$$S_{DMB} = S_{DMC} = S_{ODM} + S_{OMB} = S_{OAD} + \frac{1}{4} S_{ABC},$$

$$S_{DMC} + S_{ODM} + S_{OAD} = S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

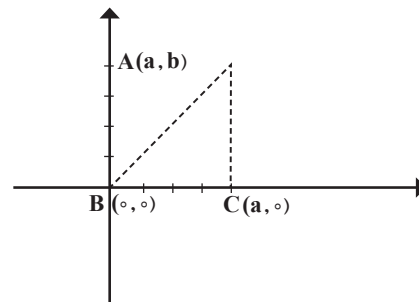
$$\Rightarrow S_{OAD} + \frac{1}{4} S_{ABC} + S_{OAD} + S_{OAD} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

$$\Rightarrow 3S_{OAD} = \frac{1}{4} S_{ABC}, S_{OAD} = \frac{1}{12} S_{ABC}$$

۴. مساحت مثلث ABC با توجه به قضیهٔ پیک برابر است با:

$$(1) S = \frac{B}{2} + i - 1$$

(برای ایجاد تمایز، تعداد نقاط درونی را با حرف B نمایش دادیم.)



همچنین روشن است که:

$$(2) S = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$

اما تعداد نقاط شبکه‌ای مرزی این مثلث چقدر است؟ (i=?)  
ضلع BC، a+1 نقطه شبکه‌ای داریم (چرا؟) و روی ضلع AC نیز b+1  
نقطه شبکه‌ای داریم که یکی از آن‌ها روی BC هم هست. اما معادلهٔ  
خط AB به صورت  $y = \frac{b}{a}x$  است (چرا؟) و چون a و b نسبت به هم اول  
هستند پس تنها نقطه‌های شبکه‌ای روی این خط نقاطی هستند که طول  
آن‌ها مضرب صحیح a باشد (چرا؟) و این نقاط فقط خود نقاط A و B  
هستند. بنابراین تعداد نقاط شبکه‌ای مرزی مثلث ABC، مساوی a+b+1  
می‌باشد. یعنی B=a+b+1 حال از مقایسهٔ روابط (1) و (2) نتیجه می‌شود:

$$\frac{ab}{2} = \frac{a+b+1}{2} + i - 1 \Rightarrow$$

$$i = \frac{ab}{2} - \frac{a+b+1}{2} + 1 = \frac{ab - a - b + 1}{2} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

۲. پیشامدهای سالم بودن دو محصول را A و B می‌نامیم. هدف یافتن  $P(A \cup B)$  است.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

و چون سالم بودن دو محصول مستقل از هم است، پس:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \times 0.7 = 0.49$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = 0.7 + 0.7 - 0.49 = 0.91$$

## هندسه ۲

۱. فرض می‌کنیم  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  دو نقطه دلخواه و  $A'$  و  $B'$  تبدیل یافته‌های آن‌ها تحت f باشند:

$$\left. \begin{aligned} f(A) &= A'(x_1 + 1, 1 - y_1) \\ f(B) &= B'(x_2 + 1, 1 - y_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} A'B' &= \sqrt{(x_{A'} - x_{B'})^2 + (y_{A'} - y_{B'})^2} \\ &= \sqrt{(x_1 + 1 - x_2 - 1)^2 + (1 - y_1 - 1 + y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB \end{aligned}$$

پس f ایزومتری است، زیرا طول را ثابت نگه می‌دارد. این تبدیل ترکیب دو تبدیل متوالی است. ابتدا بازتاب نسبت به محور xها و سپس انتقال در راستای بردار  $\vec{u} = (1, 1)$ .

۲. چون L و L' متقاطع‌اند، پس محور بازتاب، نیم‌ساز زاویه بین آن‌هاست. اگر  $M(x, y)$  یک نقطه دلخواه از نیم‌ساز باشد، از آنجا که M از L و L' به یک فاصله است، پس معادله نیم‌ساز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{4 + 1}} &= \frac{|x - 2y - 3|}{\sqrt{1 + 4}} \\ \Rightarrow |2x + y - 1| &= |x - 2y - 3| \\ \Rightarrow 2x + y - 1 &= \pm(x - 2y - 3) \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2 = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند.

$$T(x, y) = (y, -x) = (X, Y) \Rightarrow \begin{cases} x = -Y \\ y = X \end{cases}, x + y = 2$$

$$\Rightarrow -Y + X = 2 \Rightarrow Y = X - 2$$

$$T(x, y) = (kx, ky) = (X, Y)$$

$$\Rightarrow x = \frac{X}{k}, y = \frac{Y}{k}, y = x^2 + b \Rightarrow \frac{Y}{k} = \frac{X^2}{k^2} + b$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{k} X^2 + bk \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{4}, bk = 6 \Rightarrow k = 4, b = 6$$

بنابراین f در این نقطه، از هیچ طرف پیوسته نیست (نه از راست پیوسته است و نه از چپ).

$$f(1) = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a[x] + b = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a \sin \pi x}{b(1-x)}$$

$$x = 1 + t, t \rightarrow 0^-$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{a \sin(\pi + \pi t)}{b(-t)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-a \sin \pi t}{-bt}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{a \left( \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right) \cdot \pi t}{bt} = \frac{a\pi}{b} \Rightarrow a + b = \frac{a\pi}{b} = 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{2b}{\pi} \Rightarrow b + \frac{2b}{\pi} = 2$$

$$\Rightarrow b \left( 1 + \frac{2}{\pi} \right) = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{1 + \frac{2}{\pi}} = \frac{2\pi}{\pi + 2}, a = \frac{4}{\pi + 2}$$

## جبر و احتمال

$$n(S) = 36 \text{ و}$$

$$A = \left\{ (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6) \right\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

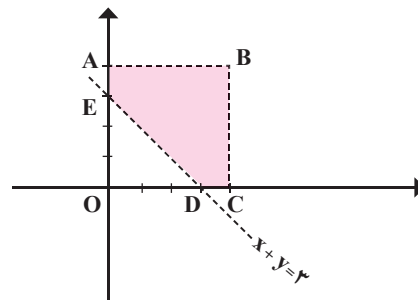
۲. طول و عرض این مستطیل‌ها را x و y در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$n(s) = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, 0 < x, y < 4\}$$

$$\text{محیط} = 2(x + y) > 6 \Rightarrow x + y > 3$$

$$A = \{(x, y) | (x, y) \in S, x + y > 3\}$$

$$P(A) = \frac{S_{ABCDE}}{S_{OABC}} = \frac{16 - \frac{9}{2}}{16} = \frac{23}{32}$$





ایستگاه سوم

حکایت اول: ترفند پروفیسور!

شاید دربارهٔ سه مسئله لاینحل تاریخ ریاضی که شهرتی عالمگیر در طول تاریخ و طی بیش از ۲۰ قرن داشته‌اند، چیزهایی شنیده باشید. بله سه مسئله معروف «تثلیث زاویه، تضعیف مکعب و تربیع دایره» را می‌گوییم. به‌طور خلاصه، تقسیم زاویه به سه قسمت مساوی (فقط با استفاده از خط‌کش غیرمدرج و پرگار)، تبدیل مکعب به مکعب دیگری که حجم آن دو برابر حجم مکعب اولیه باشد، و رسم مربعی که مساحت آن با مساحت دایرهٔ مفروض برابر باشد.

این سه مسئله، مسئله‌هایی تاریخی هستند که ثابت شده است، حل ناشدنی‌اند.<sup>۱</sup> با این حال، در طول تاریخ همواره افراد بسیاری وسوسه شده‌اند تا آن‌ها را حل کنند و خیلی‌ها، از ریاضی‌دانان نامی تاریخی خوان‌های مبتدی، در مقطعی از تاریخ مدعی یافتن راه‌حل برای آن‌ها شده‌اند و با ارائهٔ راه‌حل‌های خود، وقت استادان ریاضی را برای بررسی و یافتن اشکال استدلالشان گرفته‌اند. این امر در برهه‌هایی از تاریخ بسیار فراگیر بوده است؛ از جمله در نیمهٔ اول قرن بیستم، و حتی در کشور ما هم سوابقی از آن در سال‌های اخیر دیده می‌شود.

با این مقدمهٔ طولانی می‌رسیم به حکایت اصلی‌مان: پروفیسور کیم‌بال که سال‌ها رئیس دپارتمان ریاضی «دانشگاه ماینه» در «اورونو» بود، وقتی با سیل نامه‌هایی مواجه شد که هر یک شامل ادعای حل یکی از این مسائل بود، ترفندی برای رهایی از این مشکل پیدا کرد. او در پاسخ به همهٔ نامه‌ها، یک جواب ثابت می‌فرستاد و خیلی مؤدبانه از فرستندهٔ نامه می‌خواست که برای تأمین هزینهٔ بررسی راه‌حلش، صد دلار برای او بفرستد و معمولاً فرستندگان از ادامهٔ کار منصرف می‌شدند!



حکایت دوم: داستان خلق یک نشریهٔ ریاضی!

دومین حکایت ما در این شماره دربارهٔ بنجامین فرانکلین فینکل (۱۸۶۵-۱۹۴۷)، استاد ریاضی و بنیان‌گذار مجلهٔ مشهور «Mathematical Monthly» است که سال گذشته و در شمارهٔ ۷ برهان، به معرفی آن پرداختیم. فینکل خود در مورد چگونگی علاقه‌مند شدنش به ریاضیات می‌گوید: «وقتی ۱۵ سال داشتم و در یک مدرسهٔ دولتی معمولی درس می‌خواندم، بعضی مسائل ریاضی بودند که بین مردم عادی مطرح و به‌صورت سینه‌به‌سینه نقل محافل می‌شدند. یکی از این مسائل را برادرم در میان جمعی از مشتریان یک خواربارفروشی روستای محل اقامت ما شنیده بود و آن را برای فکر کردن به من داد.

مسئله این بود: یک توپ که قطر آن ۱۲ فوت است، روی میله‌ای به ارتفاع ۶۰ فوت نصب شده است. مردی که فاصلهٔ چشمان او تا نوک پاهایش ۱۲ فوت است، روی توپ ایستاده است. مقدار سطحی از زمین که زیر توپ قرار گرفته و مرد نمی‌تواند آن را ببیند، چقدر است؟

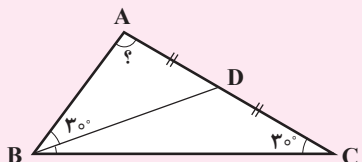
من این مسئله را پیش معلم بردم و او گفت برای حل آن به اطلاعات هندسی نیاز است که در کتاب‌های شما مطرح نشده‌اند. اما من تلاش کردم به کمک روش‌های اندازه‌گیری که در کتابی خوانده بودم، این مسئله را حل کنم و بالاخره چند سال بعد موفق به حل آن شدم. اما این مسئله به من انگیزه داد تا نه تنها ریاضیات را دنبال کنم، بلکه سال‌ها بعد همیشه در فکر انتشار مجله‌ای بودم که در آن مجموعه‌ای از این‌گونه مسائل در شاخه‌های گوناگون ریاضی مطرح شده باشد.»

فینکل این فکر را تعقیب کرد تا سرانجام در سال ۱۸۹۴ توانست نخستین شمارهٔ «American Mathematical Monthly» را منتشر کند. در نخستین شمارهٔ این مجله و در سرمقالهٔ آن فینکل نوشت: «حل مسئله یکی از ابتدایی‌ترین شکل‌های پژوهش ریاضی است، اما ارزش آموزشی آن نباید مورد مبالغه قرار گیرد. مسئله به مثابه نردبانی است که با آن می‌توان به پله‌های بالاتری از پژوهش و تحقیق ابتدایی دست یافت. بسیاری ذهن‌ها و استعدادها نهفته، با مهارت در حل تنها یک مسئله، به ذهن‌های فعال تبدیل و هدایت شده‌اند!»

\* پی‌نوشت.....  
۱. برای مطالعهٔ بیشتر در مورد این سه مسئله تاریخی می‌توانید به کتاب «تثلیث زاویه، تربیع دایره»، نوشتهٔ زنده‌یاد پرویز شهریاری و سیامک جعفری، از مجموعه کتاب‌های کوچک ریاضی «انتشارات مدرسه» مراجعه کنید.

## پاسخ پرسش‌های پیکارجو؟

۳. به کمک قضیه سینوس‌ها در مثلث‌های ABD و BDC خواهیم داشت:



$$\Delta BDC: \frac{BD}{\sin 30^\circ} = \frac{DC}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2 \sin \alpha}$$

$$\Delta ABD: \frac{AD}{\sin 30^\circ} = \frac{BD}{\sin A} \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{\sin A}{\frac{1}{2}}$$

$$\sin A = \sin(180^\circ - B - C) = \sin(120^\circ - \alpha)$$

$$AD = DC \Rightarrow \frac{1}{2 \sin \alpha} = 2 \sin(120^\circ - \alpha)$$

$$\Rightarrow 4 \sin \alpha \sin(120^\circ - \alpha) = 1$$

$$\Rightarrow 4 \left[ \frac{1}{2} (\cos(120^\circ - 2\alpha) + \cos 120^\circ) \right] = 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos(120^\circ - 2\alpha) + 1 = 1 \Rightarrow \cos(120^\circ - 2\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow 120^\circ - 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ \Rightarrow \hat{A} = 105^\circ$$

(گزینه ب)

۴. مطابق فرض داریم:  $\frac{1}{pq} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{n}$  یا:  $\frac{1}{pq} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{n}$

و یا:  $\frac{1}{pq} = \frac{p+q+1}{n}$  در نتیجه:  $n | pq$  و لذا:  $n=p$  یا  $n=q$

یا  $n=q$  یا  $n=pq$ . اکنون به سادگی می‌توان تحقیق کرد که حالت‌های  $n=pq$ ،  $n=p$ ،  $n=q$  نمی‌توانند درست باشند و فقط  $n=1$  می‌تواند درست باشد که از آنجا داریم:

$$p+q+1=pq \Rightarrow p(q-1)=q+1$$

$$\Rightarrow p = \frac{q+1}{q-1} = \frac{q-1+2}{q-1} \Rightarrow p = 1 + \frac{2}{q-1}$$

$$\Rightarrow q-1 | 2 \Rightarrow q-1=1 \text{ یا } 2 \Rightarrow q=2 \text{ یا } 3$$

در نتیجه دو جواب به صورت‌های  $(p,q)=(3,2)$  و  $(p,q)=(2,3)$  وجود دارد (گزینه ب).

۵. می‌دانیم  $n$  خط در صفحه حداکثر  $\frac{n(n+1)}{2} + 1$  ناحیه مجزا ایجاد می‌کنند. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 \geq 1395 \Rightarrow n(n+1) \geq 2788$$

$$\Rightarrow \min(n) = 53 \text{ (گزینه د)}$$

۱. روشن است که  $2^y+1$  یا  $3^k+1$  یا  $3^k$  یا  $y=3^k$ . در حالت اول داریم:

$$2^y + 1 = 2^{3^k} + 1 = 8^k + 1 \equiv 2$$

و در حالت دوم:

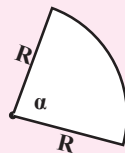
$$2^y + 1 = 2^{3^{k+1}} + 1 = 2 \times 8^k + 1 \equiv 3$$

و در حالت سوم:

$$2^y + 1 = 2^{3^{k+2}} + 1 = 4 \times 8^k + 1 \equiv 5$$

بنابراین  $2^y+1$  هرگز مضرب ۷ نیست (گزینه ه).

۲. می‌دانیم طول کمانی به شعاع  $R$  و زاویه  $\alpha$  (با واحد رادیان) برابر با  $R\alpha$  است. پس محیط قطاع مساوی  $2R+R\alpha$  یا  $R(\alpha+2)$  است. یعنی  $R(\alpha+2)=4$  و مساحت قطاع مساوی  $\frac{1}{2}R^2\alpha$  است. بنابراین:



$$S = \frac{1}{2}R^2\alpha = \frac{1}{2}R^2 \left( \frac{4}{R} - 2 \right) = 2R - R^2 = 100 - (R-10)^2$$

و  $0 \leq (R-10)^2$  در نتیجه:  $S \leq 100$  و  $\text{Max}(S)=100$  (گزینه ب)

## پرسش‌های پیکارجو!

مربعی به ضلع واحد مفروض است. حداقل چند خط راست باید از نقاط متفاوت روی محیط آن گذرانند تا سطح آن به ۱۳۹۵ بخش مجزا یا بیشتر تقسیم شود؟

الف) ۵۰

ب) ۵۱

ج) ۵۲

د) ۵۳

ه) ۵۴





# پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...

یاران و همراهان همیشگی سلام! سلامی چو بوی خوش آشنایی. در این صدمین شمارهٔ برهان، خوش‌حالیم که یک ربع قرن در خدمت جوانان پاک‌نهاد این سرزمین بوده‌ایم. اینک در صدمین شمارهٔ برهان از همهٔ شما عزیزان سپاس‌گزاریم و به لطف حضور گرم شما و دعای خیرتان، به ادامهٔ کار دلخوش و امیدواریم. باز هم نامه‌ها و ایمیل‌هایی از شما داشته‌ایم که به برخی از آن‌ها پاسخ‌هایی کوتاه می‌دهیم.

- دوست دانش‌آموز، آقای **علیرضا آقکند**، دانش‌آموز سال چهارم دبیرستان فرهنگ دهخدا از کرج مقاله‌تان با عنوان «بررسی تعداد توابع قابل تعریف روی حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه» به‌دست ما رسید. البته همان‌طور که بیان کرده‌اید، فرمولی را کشف کرده‌اید که درست هم هست، ولی این دستور در بسیاری از کتاب‌های ریاضیات گسسته آمده است و مباحثی از این دست کاملاً تکراری‌اند. یعنی در کارتان نوآوری به چشم نمی‌خورد. با سپاس از تلاش‌تان امیدواریم در فرصتی دیگر بتوانید مطلب بهتری برایمان فراهم آورید که در این صورت در خدمتتان هستیم.
- همکار گرامی، خانم **پروانه محمدی**، از شهرستان خمین دو مقاله‌تان با عنوان‌های «معرفی یک شیوهٔ جدید نمره‌گذاری و درجه‌بندی» و «یک راهنمای عملی برای پیشرفت آموزش ریاضی» به دستمان رسید. بارها و بارها تأکید کرده‌ایم که این‌گونه مقاله‌ها را که مناسب معلمان ریاضی هستند، برای همکاران ما در مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» ارسال کنید و مخاطب برهان فقط و فقط دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه هستند. با سپاس از لطف‌تان، منتظر کارهای دیگران هستیم.
- جناب آقای **محمود ندایی**، دبیر ریاضی از استان گیلان حل مسائل ارسالی به مسئول صفحهٔ «پای تخته» تحویل داده شد. با تشکر از لطف‌تان.



## با مجله‌های رشد آشنا شوید



### مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهنامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

- **شک و کورک**  
برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی
- **شک و آه‌آه**  
برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی
- **رشد دانش‌آموز**  
برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

### مجله‌های دانش‌آموزی

بمقورات ماهنامه و هفت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

- **رشد جوانان**  
برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول
- **رشد برهان**  
برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم
- **رشد جوانان**  
برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

### مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و هفت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

- **رشد آموزش ابتدایی**  
رشد تکنولوژی آموزشی
- **رشد مدرسه فردا**  
رشد معلم

### مجله‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

- **رشد آموزش قلم‌نویس و معارف اسلامی**  
رشد آموزش زبان و ادبی فارسی
- **رشد آموزش غیر**  
رشد آموزش مسکون مدرسه
- **رشد آموزش علوم اجتماعی**  
رشد آموزش تاریخ
- **رشد آموزش جغرافیا**  
رشد آموزش زبان‌های خارجی
- **رشد آموزش ریاضی**  
رشد آموزش فیزیک
- **رشد آموزش شیمی**  
رشد آموزش زیست‌شناسی
- **رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کاردانش**  
رشد آموزش پیش‌دبستانی

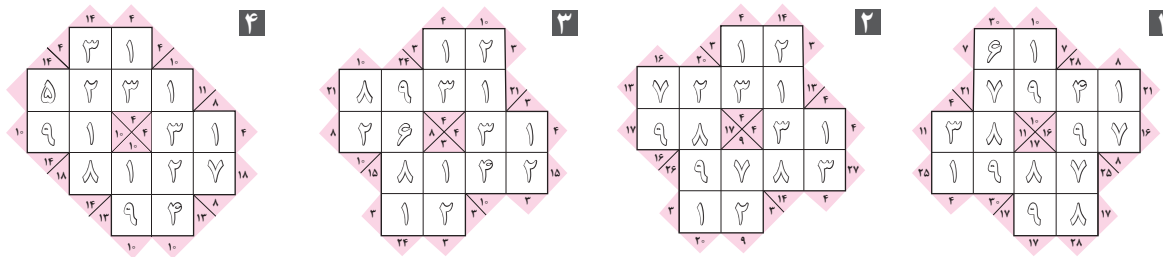
مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای همکاران، معلمان، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جوینان دانشگاه فرهنگیان و کارکنان گروه‌های آموزشی و ... تهیه و منتشر می‌شود.

- **تشیقاتی تهران**: خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۳۶۴

- **تلفن و نمابر**: ۰۲۱ - ۸۸۳ - ۸۳۷۸
- **وب‌سایت**: [www.rshdang.ir](http://www.rshdang.ir)

# پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول‌های عددی ویژه!



ایستگاه دوم: شوالیه‌های روز و شوالیه‌های شب!

- یک اصل کلی وجود دارد: در طول روز همه شهروندان می‌توانند بگویند شوالیه روز هستند (شوالیه‌های روز به راستی و شوالیه‌های شب به دروغ) و در طول شب همه آن‌ها می‌توانند بگویند شوالیه شب هستند (چگونه؟) پس کافی است از یک نفر بپرسید: «آیا تو شوالیه روز هستی؟» اگر او پاسخ بله بدهد، می‌فهمید آن زمان روز است و اگر پاسخ خیر بدهد، می‌فهمید شب است!
- یک اصل دیگر هم این است: شوالیه‌های روز همیشه می‌گویند: اکنون روز است و شوالیه‌های شب همیشه می‌گویند: اکنون شب است. (چرا؟) پس کافی است از او بپرسید: آیا اکنون روز است؟ اگر بگوید بله، او شوالیه روز است و اگر بگوید خیر، شوالیه شب است!
- او می‌گوید که در طول روز دروغ می‌گوید، یا به عبارت دیگر، شوالیه شب است. بنابراین موقعی که این حرف را زده، شب بوده است.
- جمله نخست این شخص به وضوح دروغ است، زیرا در طول روز هیچ شهروندی نمی‌تواند بگوید که شوالیه شب است. (چرا؟) بنابراین در آن وقت او دروغ گفته و جمله دوم او هم دروغ است. در نتیجه او واقعاً شوالیه شب است و آن هنگام روز بوده است.
- همان‌طور که در حل مسئله قبل دیدیم، این جمله نمی‌تواند راست باشد، پس خلاف آن درست است. یعنی او شوالیه شب نیست، یا اینکه آن موقع شب بوده است. یعنی او شوالیه روز بوده یا اینکه آن موقع شب بوده است. او شوالیه شب نبوده است (زیرا در این صورت جمله‌اش راست می‌بود)، پس شوالیه روز بوده و آن هنگام شب بوده است.



اقتصاد مقاومتی؛ اقدام و عمل

رشد برای رشد

نحوه اشتراک:  
پس از واريز مبلغ اشتراك به شماره حساب ۳۹۲۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سپهراهر آمايش كد ۳۹۵ در وجه شركت افست، به دو روش زير، مشترک مجله شوید:

- مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: [www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir) و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی؛
- ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگه تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۸۸۴۹۰۲۳۳ لطفاً کپی فیش را نزد خود نگه دارید.

عنوان مجلات درخواستی:

.....

نام و نام خانوادگی:

.....

تاریخ تولد:

.....

تلفن:

.....

نشانی کامل پستی:

.....

استان:

.....

خیابان:

.....

پلاک:

.....

شماره فیش بانکی:

.....

مبلغ پرداختی:

.....

.....

امضا:

نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۱۱۵۵/۴۷۹

تلفن بازرگانی: ۰۲۱-۸۸۸۲۳۰۸

Email: [Eshterak@roshdmag.ir](mailto:Eshterak@roshdmag.ir)

.....

هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۲۵۰/۰۰۰ ریال

هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال